Preliminares de Matemática

Gareis, María Inés - Roldán, Marina

Facultad de Ingeniería - UNLPam

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNLPam
Universidad Nacional de La Pampa

Preliminares de Matemática

María Inés Gareis   Marina Roldán

29 de julio de 2022

Índice general

Prefacio

Este protolibro tiene como finalidad presentar los contenidos teóricos necesarios para el cursado de Preliminares de Matemática, materia común a diversas carreras de la Facultad de Ingeniería de la UNLPam. Como tal, este material no tiene carácter innovador sino que es sólo un soporte didáctico que resulta de la recopilación de temas extraídos de otros textos de estudio los cuales se citan al finalizar el apunte.

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1.1. Números Naturales

Los números naturales son, tal como los conocemos, $1, 2, 3, 4, 5, ...$ Llamamos $\mathbf{N}$ al conjunto de los números naturales, es decir: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Estos números se usan a diario para contar. Matemáticamente, contar significa decir cuántos elementos tiene un conjunto. Por ejemplo, el conjunto $\{a, b, c, d\}$ tiene 4 elementos. ¿Cuántos elementos tiene un conjunto vacío? Como un conjunto vacío no posee ningún elemento, necesitamos un símbolo nuevo que represente la cantidad de elementos de este conjunto. Este símbolo es el 0. Llamamos $\mathbf{N}_0$ al conjunto de los números naturales con el cero, o sea: $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$.

1.1.1. Operaciones en el conjunto de los Números Naturales

El conjunto de los números naturales tiene dos operaciones importantes: *suma* y *producto*. La suma y el producto de números naturales son operaciones que verifican las siguientes propiedades.

Propiedades de la Suma: Sean $a, b, c \in \mathbf{N}$

1. *Propiedad asociativa:* $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. *Propiedad conmutativa:* $a + b = b + a$

Propiedades del Producto: Sean $a, b, c \in \mathbf{N}$

1. *Propiedad asociativa:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. *Propiedad conmutativa:* $a \cdot b = b \cdot a$
3. El 1 es el *elemento neutro para el producto*, es decir: $1.a = a.1 = a$

Propiedad Distributiva del Producto respecto de la Suma Las operaciones de suma y producto están relacionadas por:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Notemos que la suma no tiene elemento neutro en $\mathbf{N}$, aunque sí en $\mathbf{N}_0$: el 0, ya que $a + 0 = 0 + a = a$

Ejemplo 1.1. Veamos cómo se pueden usar estas propiedades para calcular, por ejemplo, el cuadrado de la suma de dos números naturales:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && \text{Propiedad distributiva}\\
&= (a+b)a+(a+b)b && \text{Propiedad distributiva}\\
&= a.a+ba+ab+b.b\\
&= a^2+ab+ab+b^2 && \text{Propiedad conmutativa del producto}\\
&= a^2+2ab+b^2
\end{aligned}$$

De esto se deduce la identidad $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ la que resulta de gran utilidad al momento de calcular el cuadrado de un binomio.

Ejercicio 1.2. Encontrar una fórmula para calcular $(a+b)^3$.

1.2. Números Enteros

1.2.1. Las operaciones y sus propiedades.

Para continuar con el estudio de los números, consideremos $\mathbf{N}_0$ el conjunto de los números naturales y el cero, y pensemos lo siguiente: sabemos que dos números naturales se pueden sumar y se obtiene como resultado otro número natural; también se pueden multiplicar y el resultado es un número natural. Por ejemplo,

$$13 + 15 = 28 \in \mathbf{N} \qquad \text{y} \qquad 13 \cdot 15 = 195 \in \mathbf{N}$$

Además, si quisiéramos restar uno de otro, por ejemplo, hacer $15 - 3$ también se puede dentro del conjunto $\mathbf{N}$, es decir $15 - 3 = 12 \in \mathbf{N}$.

Una situación cotidiana que refleja esta situación matemática es la siguiente: si Matías tiene 16 figuritas, Pablo le puede pedir prestadas 12 y a Matías aún le quedan 4. En cambio, si Matías tuviera sólo 10 figuritas, Pablo no debería esperar que le preste 12 porque no tiene más de 10. Es decir, ¿qué ocurre si queremos efectuar la operación de resta en el otro sentido, o sea, $10 - 12$? ¿A 10 se le puede sacar 12? Veremos enseguida que, en realidad, sí se puede efectuar esta operación, pero el resultado ya no es un número natural. Recordemos que la operación suma dentro de $\mathbf{N}_0$ tiene al cero como elemento neutro porque $a + 0 = a$ y $0 + a = a$ para todo número natural a. Pero ningún número natural tiene un inverso dentro de $\mathbf{N}_0$ respecto de la suma (con inverso de a nos referimos a un elemento b tal que $a + b = 0$). La pregunta es qué tipo de números deberíamos agregarle a $\mathbf{N}_0$ para que todo elemento tenga inverso respecto de la operación suma. En nuestro ejemplo, si Matías tuviera 10 figuritas, Pablo podría pedirle las 10 y en este caso, Matías no se quedaría con ninguna. Es decir, $10 - 10 = 0$, o mejor dicho, $10 + (-10) = 0$ que no es un natural pero sí pertenece a $\mathbf{N}_0$. Agreguémosle entonces a $\mathbf{N}_0$ todos los *opuestos* *aditivos* de sus elementos: el -1, el -2, etcétera. Llamaremos al nuevo conjunto que construimos de esta forma, conjunto de los números enteros y lo denotamos con la letra $\mathbf{Z}$. A partir de la construcción anterior:

$$\mathbf{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

y como vemos, contiene a $\mathbf{N}$ y a $\mathbf{N_0}$. Así dentro de $\mathbf{Z}$ cualquier $n \in \mathbf{Z}$ tiene un inverso respecto de la suma al que llamaremos su opuesto. Veamos entonces que la pregunta anterior tiene respuesta dentro de $\mathbf{Z}$ pues ahora podemos realizar la *resta* o *diferencia* de cualquier par de números enteros, por ejemplo en nuestro caso particular $10 - 12$ que será calculado como $10 - 12 = 10 + (-12) = -2$. Es decir, si Matías tuviera diez figuritas, le faltarían dos para poder prestarle 12 a su amigo. Luego como vemos en el ejemplo la conocida diferencia entre 10 y 12 resulta de hacer la operación suma entre 10 y el opuesto aditivo de 12.

Ejemplo 1.3. Pitágoras, filósofo y matemático griego, nació aproximadamente en el año 582 a.C. y vivió 75 años; ¿en qué año murió? Si Pitágoras nació en el año 582 a.C., es decir, 582 años antes del año cero, y vivió 75 años, entonces murió 75 años más tarde de su año de nacimiento, es decir que murió en el año 507 a.C. y la respuesta es fácilmente calculada haciendo el siguiente cálculo: $-582 + 75 = -507$.

Ejercicio 1.4. Calcular qué diferencia de altura hay desde la cima del Aconcagua, que se halla a 6959 metros sobre el nivel del mar, hasta el fondo de la laguna del Carbón, en la provincia de Santa Cruz, donde el altímetro marca 105 metros bajo el nivel del mar.

Solución: hay 7064 metros de diferencia entre ambas magnitudes.

Ampliado el conjunto de los números naturales a este nuevo conjunto numérico, debemos redefinir la operación suma para poder realizarla ahora entre dos números enteros. La suma se realizará fácilmente de acuerdo a las siguientes reglas:

- ✓ Si ambos números tienen igual signo entonces simplemente se suman (considerando los valores sin signo, realizamos la suma natural conocida) y el resultado llevará el signo que tienen los elementos que intervienen en la operación.

- ✓ Si los números tienen distinto signo se efectúa la diferencia entre ellos (considerando los números sin signo hacemos la diferencia del elemento mayor menos el menor) y el resultado llevará el signo del elemento mayor.

Además, en el conjunto de los números enteros podemos sumar y restar sin salir de él. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.5. $572 + 396 = 968$ $\qquad -572 - 396 = -968$

$572 - 396 = 176$ $\qquad 396 - 572 = -176$

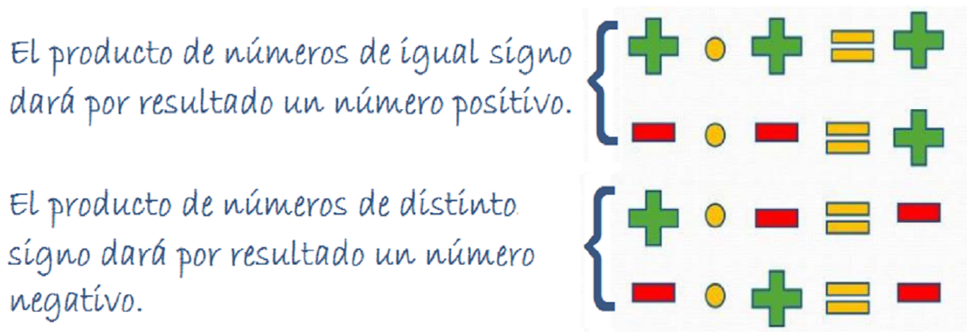
Producto de números enteros El ingrediente nuevo que aparece al multiplicar números enteros es el signo: ¿cómo calculamos $3 \cdot (-2)$?

Así como para los números naturales el producto $3 \cdot 2$ significa sumar dos veces 3, que es $3+3=6$, el producto $3\cdot$ (-2) significa restar dos veces 3, o sea: $-3-3=-6$.

De aquí surge la conocida regla de que para multiplicar un número positivo por otro negativo: el resultado es un número negativo.

¿Cómo calculamos $(-3) \cdot (-2)$? En este caso, debemos restar dos veces -3, o sea: $-(-3)-(-3)=6$. De esta manera notamos que el producto de dos números negativos es un número positivo.

Para multiplicar “números con signo hay que respetar entonces las siguientes reglas:



Propiedades en Z

Las operaciones de suma y producto de Números Enteros son cerradas en **Z**, esto significa que dan por resultado otro número entero. Además dichas operaciones verifican las siguientes propiedades:

Sean $a, b, c \in \mathbf{Z}$,

1. Asociativa de la suma: $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. Conmutativa de la suma: $a+b = b+a$
3. Existe $0 \in \mathbf{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbf{Z}$ se verifica: $a+0 = 0+a = a$
4. Para cada $a \in \mathbf{Z}$, existe un único elemento al que llamaremos $-a \in \mathbf{Z}$ tal que $a+(-a) = 0$
5. Asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. Conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a$
7. Existe $1 \in \mathbf{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbf{Z}$ se verifica: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8. Distributiva del producto respecto de la suma: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Ejemplo 1.6. Resolvamos el siguiente cálculo combinado, utilizando las propiedades vistas anteriormente:

$$(-3) \cdot (-15 + 12 \cdot 5) + 9 =$$

Solución:

Para resolver cualquier cálculo combinado primero debemos separar el mismo en términos. A continuación se resuelven los paréntesis, corchetes y llaves, en caso de existir, comenzando por los productos, luego las sumas, y acorde a las reglas vistas en cada caso. Finalmente resolvemos las multiplicaciones y luego las sumas según los resultados obtenidos.

$$
\begin{aligned}
(-3)\cdot(-15+12\cdot 5)+9 &= (-3)\cdot\underbrace{(-15+60)}+9\\
&= \underbrace{(-3)\cdot \quad 45}\quad +9\\
&= \quad -135 \qquad +9\\
&= -126
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.7. Resolver los siguientes cálculos combinados:

a) $3-[5-(-11+2-3+2+1)+8]-9=$

b) $-6-\{-17-[6-(-2+5)-5]-8\}-2=$

Solución:

a) -28

b) 15

1.2.2. Divisibilidad y algoritmo de la división

Imaginemos que tenemos una tableta de chocolate de seis cuadraditos que dos amigos quieren compartir por igual. Esta operación puede realizarse convenientemente, y a cada uno le tocan tres de las seis partes que tiene la tableta. Ahora, imaginemos que tenemos 7 lapiceras que queremos repartir entre los dos amigos. Es claro que, para que a cada amigo le toque la misma cantidad, podemos darle tres lapiceras a cada uno pero sobra una lapicera, es decir, la lapicera sobrante no puede partirse. La división es la operación que permite averiguar cuántas veces un número, el *divisor*, está contenido en otro número, el *dividendo*. Por ejemplo, el 2 está 3 veces en el 6, porque $3 \cdot 2 = 6$, entonces 6 dividido 2 es igual a 3. En este sentido, la división es la operación inversa de la multiplicación. Se denomina *cociente* al resultado entero de la división. Si la división no es *exacta*, es decir, el divisor no está contenido un número exacto de veces en el dividendo, la operación tendrá un *resto*. En el caso de las lapiceras, si se divide 7 por 2 se obtiene un cociente de 3 unidades y un resto de 1 unidad, lo que también puede expresarse como: $7 = 3 \cdot 2 + 1$.

Definición 1.8. Si $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, decimos que a divide a b si existe $q \in Z$ tal que $b = q \cdot a$, donde q es el cociente de la división de b por a.

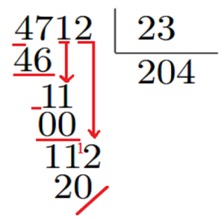
Para expresar simbólicamente este hecho, se escribe $a|b$. También se dice que b es divisible por a, o que a es un divisor de b.

Algoritmo de división

Para efectuar la división de un número natural por otro y obtener la expresión:

$$\textit{dividendo} \;=\; \textit{cociente} \;.\; \textit{divisor} \;+\; \textit{resto}$$

el procedimiento es el que aprendimos en la escuela primaria. Por ejemplo: para el dividendo 4712 y divisor 23 tenemos:



El algoritmo de división exige que el resto sea siempre no negativo, es decir, positivo o cero. Podemos entonces sintetizar lo visto en el siguiente enunciado:

"Dados los enteros n y d, con $d \neq 0$, el algoritmo de división es el procedimiento que permite escribir de manera única $n = qd + r$ donde $0 \leq r < |d|$. Los números q y r se dicen el cociente y el resto, respectivamente, de la división de n por d".

Nota 1.9. La expresión $|d|$ indica considerar el número d sin signo, es decir, positivo.

Ejemplo 1.10. 2 divide a 2 (en efecto, existe $1 \in \mathbf{Z}$ tal que $2 = 1 \cdot 2$). También 2 divide a 4, a 6, a 8, a 20, y a todos los números pares. Justamente, un número es par si es divisible por 2, es decir, el resto de dividir a un número par por 2 es cero. Luego, si $n \in \mathbf{Z}$ es par, entonces $n = 2k$ para algún $k \in \mathbf{Z}$.

Ejercicio 1.11. ¿Cómo se puede describir a todos los números impares?

1.2.3. Teorema fundamental de la aritmética

Definición 1.12. Un número entero se dice primo si tiene exactamente cuatro divisores distintos; en otras palabras, $n \in \mathbf{Z}$ es primo si y sólo si sus únicos divisores son $1, -1, n$ y $-n$ y éstos son todos distintos entre sí. Un número entero distinto de $1, -1$ y 0 que no es primo se dice compuesto.

La razón del nombre *compuesto*, como veremos enseguida, es que si $n \neq 1, -1, 0$ no es primo, entonces n es un producto de primos. El 1 no es primo. Los primeros primos positivos son

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ...$$

Ejemplo 1.13. Los divisores de 6 son $1, 2, 3, 6$ y sus opuestos, $-1, -2, -3$ y -6; es decir que 6 tiene ocho divisores en total. En particular, 6 no es primo. En cambio, los únicos divisores de 7 son $1, 7$ y sus opuestos, -1 y -7; por lo tanto, 7 es primo.

Teorema 1.14. Teorema Fundamental de la Aritmética. Todo $n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, 1, -1$, se factoriza como producto de primos y esta factorización es única, salvo por el orden de los factores.

Ejemplo 1.15. ¿Cómo obtener la descomposición en factores primos de un entero dado? Calculemos la factorización de 360; el procedimiento consiste en dividir sucesivamente por los primos positivos, en orden, empezando por el 2, tantas veces como sea posible, o sea:

$$\begin{array}{l|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Luego la descomposición de 360 en factores primos será:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Observación 1.16. La descomposición en factores primos nos da la posibilidad de calcular todos los divisores de un número, en el ejemplo anterior podemos calcular los divisores de 360, conjunto que notaremos $D(360)$ haciendo los distintos productos entre los primos que lo componen:

$D(360)$	Primos
1	–
2	2
3	3
5	5
6	$2\cdot 3$
10	$2\cdot 5$
15	$3\cdot 5$
4	$2\cdot 2$

$D(360)$	Primos
9	$3\cdot 3$
8	$2\cdot 2\cdot 2$
12	$2\cdot 2\cdot 3$
20	$2\cdot 2\cdot 5$
18	$2\cdot 3\cdot 3$
45	$3\cdot 3\cdot 5$
30	$2\cdot 3\cdot 5$
36	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$

$D(360)$	Primos
24	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$
60	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$
40	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 5$
90	$3\cdot 3\cdot 2\cdot 5$
72	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$
120	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$
180	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$
360	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$

Luego

$$D(360) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360\}$$

Notemos que sólo pusimos los divisores positivos de 360 aunque asumimos que los opuestos de los valores mencionados también dividen a 360.

Observación 1.17. La factorización prima de un entero negativo es la de su opuesto aditivo multiplicada por -1.

1.2.4. Máximo común divisor

Además de poder averiguar todos los divisores de un número, a veces es importante conocer los divisores comunes de dos enteros para dar respuesta a la pregunta,

¿cuánto vale el divisor más grande de ambos? Por ejemplo, los divisores positivos de 54 forman el conjunto:

$$D(54) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

Por otra parte, los divisores positivos de 60 son:

$$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Notemos que los naturales $1, 2, 3$ y 6 están en ambos conjuntos, es decir, que son divisores comunes de 54 y 60, de los cuales el máximo es el 6. En otras palabras, 6 es el máximo común divisor de 54 y 60; lo denotamos así:

$$MCD(54, 60) = 6 \quad \text{o bien} \quad (54 : 60) = 6$$

Precisemos la definición usando el concepto de divisibilidad:

Definición 1.18. Dados a y b en $\mathbf{Z}$, ambos distintos de cero, el máximo común divisor de a y b es un número natural d que verifica:

1. $d|a$ y $d|b$.

2. Si $c \in \mathbf{Z}$ es cualquier otro entero tal que $c|a$ y $c|b$, entonces $c|d$.

La primera condición de la definición exige que d sea divisor de a y de b; la segunda, que sea el máximo entre todos los divisores comunes de a y b, ya que cualquier otro divisor común c divide a d.

Ejemplo 1.19. Estudiemos otro ejemplo: calcular d, el máximo común divisor de 252 y 360, a partir de sus descomposiciones primas.

Efectuemos las factorizaciones:

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad \text{y} \qquad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

entonces 2 y 3 dividen a ambos números. Notar que, en realidad, 2^2 y 3^2 dividen a ambos, dado que aparecen en sus descomposiciones; no así 2^3, que está sólo en la factorización de 360 pero no en la de 252. Por lo tanto: $2^2 \cdot 3^2$ divide a d. Es decir que, dado que el 2 aparece en la descomposición prima de 252 con exponente 2, y el 2 aparece en la descomposición prima de 360 con exponente 3, el 2 aparece en la descomposición prima de d con exponente 2, que es el exponente más chico de los dos. Análogamente, 3^2 aparece en la factorización en primos de d. Más aún: $d = 2^2 \cdot 3^2$ de lo contrario, debería haber algún otro primo que divida a d, pero como d divide a 252 y 360, un primo tal también dividiría a 252 y 360; pero ya vimos que los únicos primos que los dividen a ambos son 2 y 3 y vimos también cuál es la máxima potencia de cada uno de estos primos, que divide tanto a 252 como a 360.

Observación 1.20. El máximo común divisor es el producto de los primos comunes elevados a su menor exponente.

Ejemplo 1.21. En una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: $250l$, $360l$, y $540l$. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafas iguales. Calcular las capacidades máximas de estas garrafas y el número de garrafas que se necesitan.

Solución:

Para hallar la capacidad máxima de las garrafas debemos ver cuál es el valor máximo en que se pueden dividir simultáneamente 250, 360 y 540 litros de vino, es decir buscamos $MCD(250, 360, 540)$. Para ello necesitamos la descomposición de cada valor en factores primos.

$$\begin{array}{r|l}
250 & 2 \\
125 & 5 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 & \\
 & \\
 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
540 & 2 \\
270 & 2 \\
135 & 3 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

De donde: $250 = 2 \cdot 5^3$ $\qquad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\qquad 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

Y por lo tanto $MCD(250, 360, 540) = 2 \cdot 5 = 10$

De allí se deduce que las garrafas deberán tener una capacidad máxima de $10l$.

Esto implica que se necesitan 25, 36 y 54 garrafas de vino, lo que suma un total de 115 garrafas.

Por lo tanto se necesitan en total 115 garrafas de $10l$ cada una para envasar el vino de los tres toneles.

1.2.5. Mínimo común múltiplo

Para lograr un rendimiento óptimo, la fábrica X *recomienda a los propietarios de sus autos cambiar el aceite cada* $6.000km$ *y el líquido refrigerante cada* $8.000km$. *¿Cuál es la cantidad mínima de km al cabo de la cual hay que renovar los dos líquidos a la vez?*

La respuesta a esta pregunta es una cantidad n *de km tal que coincida el cambio de aceite con el de líquido refrigerante; es decir que, en miles de km,* n *debe ser* 6 *ó* 12 *ó* 18*, etcétera para que toque hacer un cambio de aceite y, por otra parte,* n *debe ser* 8 *ó* 16 *ó* 24*, etcétera para que sea necesario efectuar un cambio de refrigerante. Es decir que:* n *debe ser a la vez múltiplo de* 6 *y de* 8*. ¿Cuál es el natural que más fácilmente cumple esta condición? Seguramente* 48*, que es igual a* 6 *por* 8*, es el primer ejemplo que nos viene a la mente; claramente es un múltiplo tanto de* 6 *como de* 8*, pero no necesariamente es el más chico entre todos los múltiplos comunes. En otras palabras,* n *debe ser a la vez múltiplo de* 6 *y de* 8 *y, entre todos los múltiplos de* 6 *y de* 8*, nos interesa el mínimo. Si pensamos cuidadosamente, nos* *damos cuenta de que el mínimo natural que satisface estas condiciones es* $n = 24$*, en unidades de miles de* km*. La respuesta es que cada* 24,000km *corresponde renovar los dos líquidos para optimizar el rendimiento. Decimos entonces que* 24 *es el mínimo común múltiplo de* 6 *y* 8 *y denotamos:* $mcm(6, 8) = [6 : 8] = 24$

Definición 1.22. Dados enteros a y b, un número natural m se dice el mínimo común múltiplo de a y b si verifica:

1. $a|m$ y $b|m$.

2. Si $m\prime$ es otro natural tal que $a|m\prime$ y $b|m\prime$, entonces $m|m\prime$.

La primera condición de la definición exige que m sea múltiplo de a y de b; la segunda, que sea el mínimo entre todos los múltiplos comunes de a y b, ya que cualquier otro múltiplo común m' es dividido por m.

Ejemplo 1.23. Calculemos m, el mínimo común múltiplo de 252 y 360, a partir de sus descomposiciones primas.

Como ya efectuamos anteriormente sus descomposiciones en factores primos, sabemos que:

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad y \qquad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

El múltiplo común a ambos debe tener todos los factores primos que aparecen en una y otra descomposición, es decir m debe ser divisible por $2, 3, 5$ y 7. Además el valor buscado tiene que ser divisible por 252 y 360 con lo cual debe ser mayor a ellos, esto nos indica que los primos involucrados en la factorización de m no sólo deben ser todos los que aparecen en 252 y en 360 sino que deben estar elevados a su mayor potencia. De donde $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Nota 1.24. Observemos entonces que el mínimo común múltiplo es el producto de los primos comunes y no comunes elevados a su mayor exponente.

Ejemplo 1.25. Un faro enciende su luz cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. A las $6{,}30H$ de la tarde los tres coinciden. Averigua las veces que volverán a coincidir en los cinco minutos siguientes.

Solución:

Los tres faros encienden sus luces cada $12, 18$ y 60 segundos. Si a las $6{,}30H$ se encienden los tres al mismo momento entonces debemos ver cuando estos segundos vuelven a coincidir, y para ello buscaremos el $mcm(12, 18, 60)$. Para hallarlo en primer lugar debemos factorizar en producto de sus factores primos cada valor.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De donde: $12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 18 = 2 \cdot 3^2 \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Y por lo tanto $mcm(12, 18, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$, es decir que las tres luces de los faros se encienden juntas cada 180 segundos, lo que se corresponden a 3 minutos. Por lo tanto, en los siguientes cinco minutos de pasadas las $6{,}30H$ las luces coincidirán sólo una vez más a las $6{,}33H$.

Ejercicio 1.26. María quiere dividir una cartulina de $40cm$ de largo y $30cm$ de ancho en cuadrados iguales, tan grandes como sea posible, de forma que no le sobre ningún trozo de cartulina. ¿Cuánto medirán los lados de los cuadrados obtenidos? ¿Cuántos cuadrados puede hacer con una cartulina? **Solución: resultan 12 cuadrados de 10cm de lado.**

Ejercicio 1.27. Luís va a ver a su abuela cada 12 días, y Ana cada 15 días. Hoy han coincidido los dos. ¿De aquí a cuántos días volverán a coincidir en casa de su abuela?**Solución: 60 días.**

Ejercicio 1.28. Un autobus pasa por una parada cada 18 minutos, otro cada 25 minutos y un tercer autobus cada 36 minutos. Si a las $9H$ de la mañana han pasado en ese lugar los tres autobuses a la vez. ¿Cuantas horas mínimo tienen que pasar para que vuelvan a parar los tres simultaneamente? ¿A que hora vuelven a coincidir? **Solución: pasarán** 15 **H hasta que vuelvan a encontrarse.**

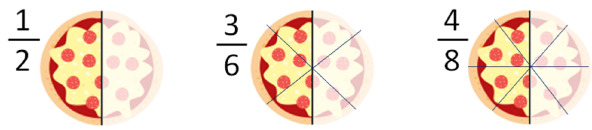
Ejercicio 1.29. Eva tiene una cuerda roja de $15m$ y una azul de $20m$. Las quiere cortar en trozos de la misma longitud, de forma que no sobre nada. ¿Cuál es la longitud máxima de cada trozo de cuerda que puede cortar? ¿Cuántos trozos obtiene luego de los cortes? **Solución: resultan 7 trozos de 5m.**

1.3. Números Racionales

Dos amigos deciden participar de un torneo de beach voley en el cual no tienen un buen desempeño. Por eso, les dan como premio consuelo un sólo sandwich de milanesa para compartir entre ambos. ¿Cómo hacen para repartir el premio entre los dos? La respuesta resulta bastante simple si estamos acostumbrados a trabajar con números. Deberían tomar medio sandwich cada uno, pero ¿qué quiere decir la mitad?, ¿qué representa el número $\frac{1}{2}$?

En la primera sección estudiamos los números naturales y vimos aplicaciones de los mismos a distintos problemas. En la segunda sección vimos la utilidad que presenta agregar al conjunto de los números naturales un elemento neutro (el cero) y un opuesto aditivo para cada número natural y obtuvimos el conjunto de números enteros. Como el conjunto de números naturales tiene dos operaciones importantes, podemos tratar de agregar inversos para el producto. No hay manera de construir un conjunto que contenga los enteros y en el cual, cada número tenga inverso multiplicativo ya que el número debe ser no nulo pues $0.b = 0$ para todo valor de b. Tratemos entonces de agrandar el conjunto de números enteros de manera tal que en el conjunto construido todos los números enteros, **salvo el cero**, tengan inverso multiplicativo. La manera intuitiva de hacerlo es considerar fracciones, esto es cocientes de la forma $\dfrac{n}{d}$ donde n y d son enteros y d no es cero. En tal expresión, al número n se lo llama numerador y al número d se lo llama denominador de la fracción. Tenemos una buena interpretación de las fracciones, la fracción $\frac{1}{d}$ representa tomar el elemento unidad 1, partirlo en d pedazos iguales y tomar uno de esos pedazos. Siguiendo la definición de los números naturales, si n es positivo, la fracción $\frac{n}{d}$ representa tomar n veces la fracción $\frac{1}{d}$.

Si nos detenemos a jugar con las fracciones, vemos que hay un problema en la definición que dimos. La fracción $\frac{1}{2}$ representa tomar la mitad de la unidad, y la fracción $\frac{3}{6}$ representa tomar tres veces la sexta parte de la unidad. Como vemos fracciones distintas representan la misma cantidad, como en la figura siguiente.



Dentro de todas las fracciones que representan el mismo número, hay una que se destaca sobre las otras y a la cual llamaremos *irreducible*.

Definición 1.30. La fracción $\dfrac{a}{b}$ es irreducible si b es positivo y $MCD(a, b) = 1$. Recordemos que $MCD(a, b)$ representa el divisor común mayor de ambos números.

Proposición 1.31. Toda fracción es equivalente a una única fracción irreducible.

Proposición 1.32. Si $\frac{a}{b}$ es irreducible y $\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$, entonces c y d son un múltiplo entero de a y de b, o sea hay un número entero m tal que $c = am$ y $d = bm$.

Observación 1.33. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones, para que sean equivalentes, por la propiedad citada arriba, el numerador y el denominador de una de ellas deben ser múltiplos de los de la otra. De aquí podemos deducir que: si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes entonces $\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}$ pues a denominadores iguales su numerador también debe coincidir. Luego, dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalente si verifican que $ad = cb$.

Ejercicio 1.34. Indicar cuáles de los siguientes pares de fracciones son equivalentes. Hallar la fracción irreducible equivalente a cada fracción dada.

1. $\frac{5}{10}$ y $\frac{10}{20}$
2. $\frac{32}{7}$ y $\frac{64}{5}$
3. $\frac{153}{2}$ y $\frac{1530}{2}$

1.3.1. Las operaciones y sus propiedades

Cuando extendimos los números naturales para obtener un conjunto en el que (además de los naturales) cada elemento tenga un opuesto aditivo, lo hicimos de manera tal que se mantengan las operaciones inducidas en $\mathbf{N}$ de suma y producto y sus propiedades. Análogamente, si extendemos el conjunto $\mathbf{Z}$ a un nuevo conjunto numérico $\mathbf{Q}$ para que cada entero no nulo tenga un inverso multiplicativo, debemos definir nuevamente las operaciones suma y producto de tal manera que aplicadas a números enteros los resultados no varíen y además se mantengan las propiedades antes válidas. Definimos entonces:

Definición 1.35. El producto de dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ lo definimos como:

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Notemos que si $a, b \in \mathbf{Z}$ entonces: $\frac{a}{1}\frac{b}{1} = \frac{ab}{1\cdot 1} = ab$

Definición 1.36. Dadas dos fracciones $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ podemos definir su suma como:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Notemos que si $a, b \in \mathbf{Z}$ entonces: $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a1+1b}{1\cdot 1} = a + b$

Propiedades de la suma y el producto de Números Racionales

Sean $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f} \in \mathbf{Q}$

1. Asociativa de la suma: $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right) + \dfrac{e}{f} = \dfrac{a}{b} + \left(\dfrac{c}{d} + \dfrac{e}{f}\right)$

2. Conmutativa de la suma: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{d} + \dfrac{a}{b}$

3. Existe $0 \in \mathbf{Q}$ tal que para todo $\dfrac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ se verifica: $\dfrac{a}{b} + 0 = 0 + \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$

4. Para cada $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, existe un único elemento al que llamaremos $\frac{-a}{b} \in \mathbf{Q}$ tal que $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$

5. Asociativa del producto: $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$

6. Conmutativa del producto: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

7. Existe $1 \in \mathbf{Q}$ tal que para todo $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ se verifica: $\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

8. Para cada $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, no nulo, existe un único elemento al que llamaremos $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbf{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

9. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

Nota 1.37. A partir de las definiciones de suma y producto podemos establecer una regla para el cálculo de diferencias y cocientes como sigue:

* $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{(-c)}{d}$

* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Ejemplo 1.38. Las propiedades anteriores nos permiten la fácil resolución entre otras cosas de ecuaciones y cálculos combinados. Veamos un ejemplo de los mencionados cálculos:

$$-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\right)\right]+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right\}=$$

Propiedad Distributiva

$$=-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{4}-\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{9}\right]+\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right\}$$

$$=-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\left[\frac{1}{3}+\frac{7}{20}-\frac{14}{45}\right]+\frac{6}{15}-\frac{1}{9}\right\}$$

$$=-\frac{13}{4}+\left\{\frac{3}{7}-\frac{67}{180}+\frac{13}{45}\right\}$$

$$=-\frac{13}{4}+\frac{29}{84}$$

$$=-\frac{61}{21}$$

Ejercicio 1.39. Resolver los siguientes cálculos combinados:

a) $2\cdot\frac{1}{5}+\left\{3-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot\left[-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1+\frac{1}{5}\right]+4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}=$

b) $1-\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\cdot\left(-10+\frac{15}{4}\right)-1\right]\right\}=$

c) $\frac{8}{15}+\frac{15}{8}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)+1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

Solución:

a) $-\dfrac{38}{5}$ b) $-\dfrac{11}{4}$ c) -1

1.3.2. Porcentajes y Fracción de un total

Imaginemos que tenemos una caja con 75 lápices y queremos tomar $\frac{2}{5}$ de ellos, eso significa entonces dividir a 75 en cinco partes iguales y de esas partes tomar sólo dos. Numéricamente esa expresión representa:

$$\frac{2 \cdot 75}{5} = \frac{2}{5} \cdot 75 = 30$$

Como vemos, tomar una fracción de un total se resuelve multilpicando ambas magnitudes. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.40. Mariana tiene \$2025 y gastó $\frac{2}{5}$ del dinero en un jean y $\frac{1}{3}$ de lo que le quedaba en comprar un Libro de Aventuras. ¿Cuánto dinero le queda aún?

Solución: En primer lugar vamos a calcular cuál fue el costo del jean. Como el mismo representa $\frac{2}{5}$ del total del dinero calcularemos:

$$\frac{2}{5} \cdot 2025 = 810$$

de donde, el jean costó \$810. Luego de esa compra a Mariana aún le quedan $2025 - 810 = 1215$ pesos, de los cuales gastó $\frac{1}{3}$ en un libro de aventuras. Calculemos ahora cuánto costó el libro:

$$\frac{1}{3} \cdot 1215 = 405$$

Así, de los \$1215 que tenía Mariana luego de comprar el jean, ahora sólo le quedan $1215 - 405 = 810$ pesos. Luego la respuesta a la pregunta planteada será: a Mariana aún le quedan \$810.

Ejercicio 1.41. Emilia tiene un libro de 144 páginas. En la primera semana, luego de comprarlo, leyó $\frac{1}{12}$ del total del libro. La semana siguiente leyó $\frac{5}{6}$ de lo que le quedaba. ¿Cuántas páginas le restan leer aún? ¿Qué fracción del total representan esas páginas?

Solución: le restan leer 22 páginas.

Ejercicio 1.42. Mariano tiene que juntar \$7200 para irse de vacaciones con sus amigos. Él sólo junto $\frac{1}{3}$ del total pero sus padres le dieron $\frac{1}{4}$ del total por haber aprobado todas las materias:

1. ¿Qué fracción del total juntó? ¿Cuánto representa esta fracción en pesos?

2. ¿Qué fracción le falta?

3. Si sus abuelos le regalan \$1200 más, ¿qué fracción del total tiene ahora?

El conocido término *porcentaje* es una forma de expresar una fracción o parte de un entero, tomando como entrero al 100. Es decir, tomar por ejemplo el 30 % de un total significa tomar $\dfrac{30}{100}$ partes de ese total. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.43. Los embalses de agua que abastecen a una ciudad tienen una capacidad total de $400km^3$ y se encuentran al 27 % de su capacidad. ¿Cuantos km^3 de agua contienen?

Solución: De acuerdo a lo enunciado por el problema el embalse tiene tan sólo el $27\,\%$ de su capacidad total, la cual es de $400km^3$. Averigüemos cuánto representa ese porcentaje en km^3 y para ello calcularemos:

$$\frac{27}{100} \cdot 400 = 108$$

Por lo tanto, el embalse contiene $108km^3$ de agua.

Ejemplo 1.44. Una máquina que fabrica tornillos produce un $3\,\%$ de piezas defectuosas. Si hoy se han apartado 51 tornillos defectuosos, ¿cuántas piezas ha fabricado la máquina?

Solución: El $3\,\%$ de los tornillos del total resultan defectuosos y eso representa a 51 tornillos entonces, si llamamos T al total producido, tenemos:

$$\frac{3}{100} \cdot T = 51 \quad \text{de donde} \quad T = 51 : \frac{3}{100} = 1700$$

y por lo tanto la máquina ha fabricado 1700 tornillos, lo que responde a la pregunta del ejemplo.

Ejercicio 1.45. Berenice ayudó a su papá a vender pizzas a domicilio durante sus vacaciones. Él ofreció pagar a la niña el $15\,\%$ de todo lo que ella vendiera. Si al finalizar el verano Berenice había vendido $\$735,5$, ¿Cuánto le pagó su papá?

Ejercicio 1.46. En una ciudad de 23500 habitantes, el $68\,\%$ están contentos con la gestión municipal. ¿Cuántos ciudadanos son?

Ejercicio 1.47. María compró, en una venta de saldos, mercancía por \$4375. Si al vender esa mercancía obtuvo una cantidad de \$5425 ¿Qué porcentaje obtuvo de ganancia?

1.3.3. Orden en los Números Racionales

La forma de comparar números racionales expresados como fracción es buscar fracciones equivalentes con igual denominador y comparar los numeradores. Veamos un ejemplo:

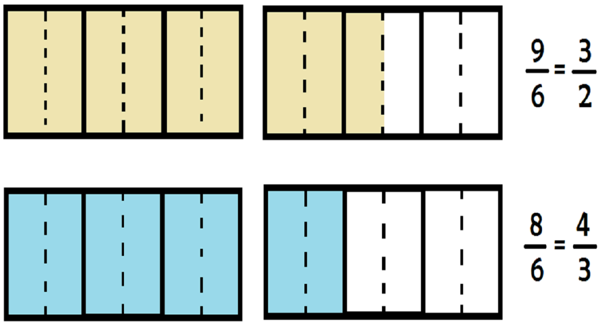
Ejemplo 1.48. Ordenar en forma creciente las fracciones $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

Solución: Para comenzar busquemos fracciones equivalentes con igual denominador. Consideraremos como denominador común a ambas el múltiplo común menor, que resulta en este caso ser $2 \cdot 3 = 6$ entonces las fracciones equivalentes a las dadas, pero con igual denominador, serán

$$\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{9}{6} \qquad \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{8}{6}$$

y como tomar 9 unidades de 6 es más grande que tomar 8 de 6, entonces resulta que $\frac{8}{6} < \frac{9}{6}$ es decir, $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$.

Generalicemos entonces estos resultados.



Definición 1.49. Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sí y sólo si $\frac{ad}{bd} < \frac{cb}{db}$, lo cual ocurre sólo si $ad < cb$ de donde:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < cb$$

Ejemplo 1.50. Ordenar en forma creciente las fracciones $\frac{11}{10}, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}$.

Solución: Para ello consideremos fracciones equivalentes a las dadas pero con denominador común e igual a 40, por ser 40 el múltiplo común más pequeño entre $10, 4$ y 8.

$$\frac{11 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{44}{40} \qquad \frac{9 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{45}{40} \qquad \frac{5 \cdot 10}{4 \cdot 10} = \frac{50}{40}$$

y como vemos fácilmente en las fracciones equivalentes obtenidas, resulta:

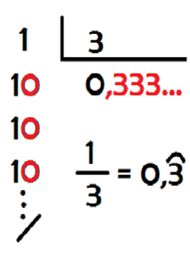
$$\frac{44}{40} < \frac{45}{40} < \frac{50}{40} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{1}{10} < \frac{9}{8} < \frac{5}{4}$$

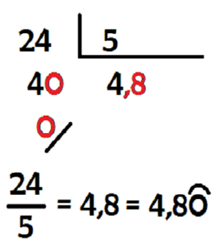
1.3.4. Representación decimal de los números racionales

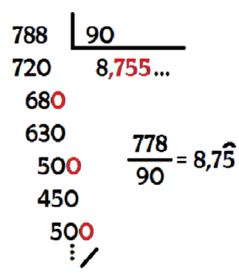
Otra de las maneras conocidas de representar los números racionales es a partir de su desarrollo decimal. Al estudiar los números enteros vimos que los podemos representar como una tira finita de números del 0 al 9. Los números racionales tienen una representación parecida pero la tira no tiene que ser necesariamente finita, aunque sí debe tener cierto periodo. Esto es, los números racionales pueden ser representados por una tira infinita de dígitos que a partir de cierto lugar comienzan a repretirse indefinidamente. Claramente ambas representaciones son equivalentes y por tanto dada una fracción podemos encontrar la expresión decimal que representa, y al revés, dado el desarrollo decimal de un número racional podemos hallar una fracción equivalente a tal desarrollo.

Paso de fracción a expresión decimal

Para poder hallar el desarrollo decimal de un número racional dado en forma de fracción simplemente debemos realizar la división del numerador por el denominador como se muestra a continuación:







Paso de expresión decimal a fracción

Para pasar de la expresión decimal a fracción se realiza de la siguiente manera. En primer lugar debemos identificar si el número tiene o no período cero y en función de eso evaluaremos los dos casos siguientes:

✓ Si el número racional tiene en su desarrollo decimal periodo cero entonces una fracción equivalente a este número racional se encontrará tomando como numerador el número dado (considerado como número entero, es decir sin coma) y como denominador un 1 y tantos 0 como números haya en la parte decimal. Por ejemplo:

$$0,953 = \frac{953}{1000} \qquad 12,578 = \frac{12578}{1000} = \frac{6289}{500}$$

✓ Si el número racional tiene periodo no nulo entonces la fracción que buscamos tendrá:

* Como numerador: la parte entera seguida de las partes decimal periódica y no periódica menos la parte entera y decimal no periódica (todo ello considerado como número entero)

* Como denominador: un 9 por cada decimal periódico y un 0 por cada decimal no periódico. Por ejemplo:

$$1,52\widehat{3} = \frac{1523-152}{900} = \frac{1371}{900} \qquad 0,7\widehat{95} = \frac{795-7}{990} = \frac{788}{990}$$

Ejercicio 1.51. Resuelve :

1. Encuentra fracciones irreducibles que representen a los números $0,\widehat{9}$ y $1,\widehat{0}$

2. Encuentra fracciones irreducibles que representen a los números $2,5\widehat{9}$ y $2,6$.

3. ¿Qué puedes deducir de los apartados anteriores?

Observación 1.52. Dos expresiones decimales distintas pueden ser el desarrollo decimal del mismo número real, y las expresiones con las cuales esto ocurre se corresponden con las dadas en el ejemplo anterior.

1.4. Números Reales

1.4.1. Números Irracionales

Podríamos decir que la mayor parte de los científicos de la historia (si no todos), ya sean matemáticos, físicos, químicos, biólogos o de cualquier otra rama, han soñado o sueñan con realizar un descubrimiento brillante, que rompa los esquemas de la ciencia de su tiempo. Pero también es cierto que cuando esto ocurre la situación no suele ser del todo cómoda para la persona en cuestión.

La historia que vamos a contar se desarrolla en torno al siglo V a.C. en la antigua Grecia y los protagonistas son los pitagóricos, aunque el protagonista principal es, por razones que veremos más adelante: Hipaso de Metaponto. Los pitagóricos tenían la firme creencia de que todo el Universo podía ser explicado con números racionales. Según cuenta la leyenda, Hipaso fue el culpable de mostrar que eso no podía ser real. Al parecer Hipaso se planteó el problema de medir la diagonal de un cuadrado de lado 1. Teniendo en cuenta la condición de pitagórico de Hipaso, es posible que él mismo esperara que la medida de esta diagonal pudiera expresarse como un número natural o una fracción... pero en realidad no fue así. Hipaso se dio cuenta de que esta medida no podía expresarse ni como un número natural ni como una fracción formada por números naturales. Ahora sabemos que esta diagonal mide $\sqrt{2}$, y que es un número de los conocidos como irracionales. Cuando el propio Hipaso comunicó este descubrimiento los pitagóricos lo arrojaron al mar por revelar fuera de la secta esta *catástrofe pitagórica.* Todo parece indicar que la raíz de la muerte de Hipaso fue exactamente la raíz de dos. Veamos el razonamiento de este matemático que lo determinó a pensar que efectivamente $\sqrt{2}$ no puede expresarse como un cociente de dos enteros. Supongamos erróneamente que existe un número racional, digamos x, tal que $x = \sqrt{2}$, dado que x es una fracción (y tomemos a ésta su expresión irreducible) existirán números enteros p y q tales que

$$x = \frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

De esta igualdad deducimos que

$$x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$$

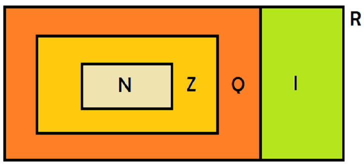
Y despejando de esta última igualdad resulta que $p^2 = 2q^2$, lo que nos indica que p^2, y por lo tanto p, son ambos números pares. Dado que p es par podrá escribirse como $p = 2k$ para algún número entero k, de donde

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$$

de donde resulta que $q^2 = 2k^2$, esto nos indica que también q es un número par. Llegado este momento del razonamiento tenemos como conclusión que tanto p como q ambos son números pares, esto indica que la fracción $\frac{p}{q}$ no puede ser irreducible ya que tanto su numerador como su denominador son divisibles por dos. He aquí el absurso que acabó con la vida de Hipaso. Claramente lo anterior nos indica que los números racionales no completan el total de números que necesitamos para trabajar, una vez más debemos ampliar el comjunto numérico si queremos medir cualquier distancia. Notemos que, como lo mencionamos anteriormente, los números racionales (que incluyen a los números enteros y por tanto a los naturales también) son aquellos cuya expresión decimal tiene infinitas cifras decimales que se repiten con cierto periodo, como ya lo adelantamos, esos no son todos los números que conocemos, por ejemplo, que ocurre con números como

$$0,10110011100011110000\cdots$$

Esta expresión decimal es *no periódica* y por tanto no es un número racional, al igual que nos ocurrió con $\sqrt{2}$. Al conjunto de números cuya expresión decimal posee infinitas cifras no periódicas lo llamaremos conjunto de los números *Irracionales* y lo simbolizaremos por **I**. La suma y producto de números iracionales puede ser racional o irracional. El conjunto de los números *Reales*, representados por **R**, es el conjunto de todos los números vistos hasta aquí, para visualizarlo podemos describirlo de la siguiente manera:



1.4.2. Las operaciones y propiedades

Las operaciones de suma y producto de Números Reales son cerradas en **R**, esto significa que dan por resultado otro número real. Además dichas operaciones verifican las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in \mathbf{R}$,

1. Asociativa de la suma: $(a+b)+c = a+(b+c)$

2. Conmutativa de la suma: $a+b = b+a$

3. Existe $0 \in \mathbf{R}$ tal que para todo $a \in \mathbf{R}$ se verifica: $a + 0 = 0 + a = a$

4. Para cada $a \in \mathbf{R}$, existe un único elemento al que llamaremos $-a \in \mathbf{R}$ tal que $a + (-a) = 0$

5. Asociativa del producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

6. Conmutativa del producto: $a \cdot b = b \cdot a$

7. Existe $1 \in \mathbf{R}$ tal que para todo $a \in \mathbf{R}$ se verifica: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

8. Para cada $a \in \mathbf{R}$, no nulo, existe un único elemento al que llamaremos $a^{-1} \in \mathbf{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

9. Distributiva del Producto respecto de la Suma:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Por cumplir las anteriores propiedades diremos que $\mathbf{R}$ tiene estructura de *cuerpo*. Además de las anteriores, algunas otras propiedades que se verifican en $\mathbf{R}$, y que nos serán de utilidad, son las siguientes:

10. $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

11. $a0 = 0a = 0$

12. $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$

13. Si $a \neq 0$ y $ab = ac$ entonces $b = c$

1.4.3. El orden en los números reales

Formalmente diremos que dados dos números rales a y b, a es menor que b si ocurre que $b - a > 0$. Sin embargo esta definición es poco práctica a la hora de establecer el orden entre ellos. Una forma de comparar números reales es a través de su desarrollo decimal. Supongamos por ejemplo que

$$x = 0,1235549 \qquad\qquad y = 0,1234549$$

En este caso los primeros tres dígitos después de la coma, de x y de y coinciden, mientras que el cuarto dígito de x es mayor que el de y, y por lo tanto diremos que $x > y$. Veamos algunos ejemplos:

✓ $-1,213 < 0,12$

✓ $-1,213 > -1,2132$

✓ $1,213 < 1,2132$

✓ $0,209 < 0,210$

Nota 1.53. Debemos tener cuidado y no usar este orden para comparar expresiones distintas que representan el mismo número real, como se vio en ejercicios anteriores. Este tipo de orden no puede utilizarse para comparar 1 y $0,\widehat{9}$ pues son expresiones distintas para el mismo número real.

Propiedades del Orden en R

La relación de orden $<$ verifica, para todos a, b, c reales, las siguientes propiedades:

1. Vale una y sólo una de las siguientes $a < b$ ó $a = b$ ó $a > b$

2. $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$

3. $0 < a$ y $b < c \Rightarrow ab < ac$

4. $a < 0$ y $b < c \Rightarrow ab > ac$

5. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Nota 1.54. diremos que $a \in \mathbf{R}$ es positivo si $a > 0$.

Nota 1.55. la relación $a \leq b$ indica que $a < b$ o $a = b$.

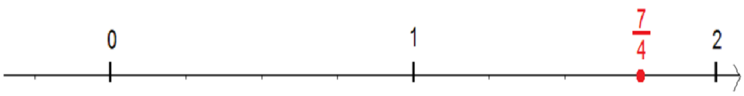
Nota 1.56. entre dos números reales cualesquiera a y b hay infinitos reales, en particular, existe $\dfrac{a+b}{2}$ tal que $a \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b$.

1.4.4. La recta numérica

Un concepto fundamental que relaciona la noción abstracta de número real con la noción geométrica de punto, es la representación de cada número sobre una recta orientada llamada *recta numérica.* La recta numérica es una recta sobre la cual se elige un punto que representará al origen de la misma (el 0), se toma otro punto a la derecha de éste que representará al 1. La distancia entre el 0 y el 1 determinará la escala de la recta y por lo tanto es la distancia que se usará para separar cada número entero de su siguiente y de su anterior. Por último, se indica el sentido creciente de la recta mediante una punta de flecha colocada en el extremo derecho de la misma. Cada punto colocado en la recta indicará en su lugar la distancia del mismo al origen. Como ya sabemos, los números racionales no llenan la recta numérica pues existen valores sobre la recta que no son alcanzados por ningún racional, por ejemplo el número π, aunque si es cierto que a cada número real se le puede asociar un punto de la recta numérica y viceversa, a cada punto de la recta real se le puede asociar un valor real único. Aunque a los efectos prácticos representar con exactitud cualquier número resulte imposible, si podemos hacerlo de manera aproximada. Veamos ahora algunos ejemlpos de cómo ubicar números en la recta real.

Ejemplo 1.57. Marca en la recta real $\frac{7}{4}$

Solución: Para ubicar el $\frac{7}{4}$ en la recta real debemos dividir cada unidad en 4 partes iguales y marcar en la séptima de ellas.

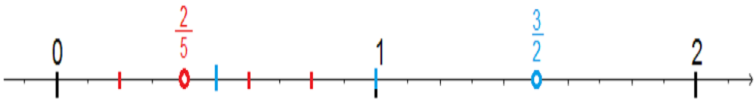


Ejemplo 1.58. Marca en la misma recta real $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{2}$

Solución: En este caso deberemos dividir cada unidad primero en 5 y luego en 2 partes iguales con lo cual vamos a dividir cada unidad en $10 = mcm(2, 5)$ para poder marcar ambas fracciones en la misma recta real.

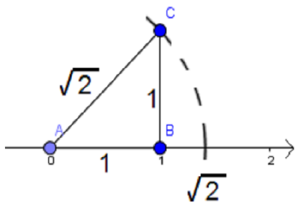
Ejemplo 1.59. Ubica en la recta real el número irracional $\sqrt{2}$.

Solución: Notemos que $2 = 1 + 1$ y por tanto $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 1 = 1^2 + 1^2$ de



donde $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$. ¿De qué nos sirven estas equivalencias? Pues por el tan conocido Teorema de Pitágoras, si dibujamos un triángulo ABC cuyos catetos AB y AC tengan medida 1, entonces su hipotenusa AC medirá $\sqrt{2}$, siendo éste el valor que queremos ubicar en la recta. Para hacerlo entonces trazaremos uno de los catetos

coincidiendo con el segmento de recta $[0, 1]$ que claramente tiene medida 1, en ángulo recto con éste trazaremos el otro cateto como se indica en la figura y por último la hipotenusa, cuyo valor es



$\sqrt{2}$, la cual será transportada, con la ayuda de un compás, sobre la recta numérica para obtener respuesta al enunciado del ejemplo.

Ejercicio 1.60. Marcar en una misma recta numérica los puntos: $\sqrt{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{9}$ y luego ordenar los números en orden ascendente.

1.5. Potenciación y Radicación

1.5.1. Potenciación.

Definición 1.61. Siendo a un número real y n un número entero positivo, se define la **potencia enésima de** a, como el número real a^n resultado del producto de n factores iguales a a.

En símbolos:

$$a^n = \underbrace{a.a.a........a}_{\text{n factores}}$$

donde a se llama base de la potencia, n el exponente y a^n simboliza la potencia enésima de a.

Ejemplo 1.62. $(-5)^2$ es la potencia dos de (-5), que se lee (-5) al cuadrado, y su resultado es: $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

Ejemplo 1.63. x^3 es la potencia tercera de x, donde se acostumbra leer potencia cúbica de x o x al cubo, siendo $x^3 = xxx$.

Ejemplo 1.64. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$ es la potencia cúbica de $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$, cuyo resultado es

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

Observación 1.65. De la definición de potenciación enésima, deducimos: “La potencia de un número sólo es negativa, cuando la base es negativa y el exponente es impar; en los otros casos el resultado es positivo.”

Definición 1.66. Si a es un número real distinto de 0 y n es un número entero positivo, definimos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 1.67.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Ejemplo 1.68.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Ejemplo 1.69.

$$4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$$

Propiedades de la potenciación:

1. **Propiedad distributiva respecto al producto**.

   Si a y b son números reales y n es un número entero positivo, entonces:

   $$(ab)^n = a^n b^n$$

   Ejemplo 1.70.

   $$((-3)x)^4 = (-3)^4 x^4 = 81x^4$$

2. **Propiedad distributiva respecto al cociente**.

   Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y n es un número entero positivo, se cumple:

   $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 1.71.

$$\text{Con } y \neq 0 : \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{(x)^2}{(y)^2} = \frac{x^2}{y^2}$$

Observación 1.72. La potenciación **no es distributiva** con respecto a la suma ni a la resta.

Ejemplo 1.73.

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

Ejemplo 1.74.

$$(x+3)^2 \neq x^2 + 9^2$$

3. **Producto de potencias de igual base.**

Si $a \in \mathbb{R}$ y m, n son dos números enteros positivos entonces:

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

si $a \neq 0$ la propiedad puede aplicarse para m, n enteros.

Ejemplo 1.75.

$$(-2)^3(-2)^6(-2)^{-2} = (-2)^{3+6+(-2)} = (-2)^7 = -128$$

4. **Cociente de potencias de igual base.**

Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $m,\ n$ son enteros, entonces:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 1.76.

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$$

Observación 1.77. Cuando $m = n$ resulta $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$; pero como $\dfrac{a^n}{a^n} = 1$, entonces $a^0 = 1$.

Ejemplo 1.78.

$$\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0 = 1$$

5. **Potencia de potencia.**

Si $a \in \mathbb{R}$ y m, n números enteros positivos, se cumple:

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

Ejemplo 1.79.

$$(x^5)^2 = x^{5.2} = x^{10}$$

Ejercicio 1.80. Determinar cuáles de las siguientes propiedades de potenciación están bien aplicadas. En el caso de ser incorrecta, corregirlo.

1. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m+n}$
3. $(a + b)^n = a^n + b^n$
4. $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejercicio 1.81. Resolver los siguientes ejercicios aplicando las propiedades de potenciación:

1. $3\left((2\cdot 3)^{-1}\dfrac{1}{2^3}\right)^{-1}(3\cdot 2^2)^{-2}$
2. $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{6^3}{2^2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}\right)^{-1}$
3. $\left(3^2\right)^3\left(2\cdot 3^5\right)^{-2}(18)^2$
4. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^2$

Solución:

1. 1
2. $3^{10}2^{-2}$
3. 1
4. $\dfrac{3^6}{2^4}$

1.5.2. Radicación

La potenciación nos permite calcular la potencia de un número, cuando se conoce la base y el exponente, por ejemplo:

$$3^3 = 27 = \text{potencia cúbica de } 3;$$

pero qué operación nos permitirá encontrar la base, cuando conocemos la potencia y el exponente de un número; por ejemplo si se tiene $x^3 = 27$, nos interesa conocer el valor de x que al elevarlo al cubo nos da 27. Para ello damos la siguiente definición:

Definición 1.82. Dado un número entero n, mayor que 1 y un número real a, llamamos **raiz enésima de** a al número real b que cumple:

$$b^n = a$$

siendo n el índice de la raíz y a el radicando.

Ejemplo 1.83. $2^3 = 8$; es decir la raiz cúbica de 8 es 2.

Ejemplo 1.84. Dado que $(-2)^5 = -32$, esto es la raiz quinta de (-2) es -32.

Ejemplo 1.85. Como $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$, tanto 5 como (-5) son raíces de índice 2 de 25.

Notación 1.86. Se denota la raíz enésima de a como $\sqrt[n]{a}$. En particular,

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{a} &= \sqrt{a} \text{ y se lee la raíz cuadrada de } a \\ &\sqrt[3]{a} \text{ es la raíz cúbica de } a, \\ &\sqrt[4]{a} \text{ es la raíz cuarta de } a, \\ &\sqrt[5]{a} \text{ es la raíz quinta de } a. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.87. Si $b^2 = -4$, no existe un número real b cuyo cuadrado resulte negativo. De este ejemplo se concluye la siguiente observación:

Observación 1.88. Si el radicando a es menor a cero, $\sqrt[n]{a}$ está definida sólo cuando n es impar. No existe raíz real de índice n par de un número negativo.

Propiedades de la radicación:

Cualesquiera sean los números reales a, b y los números m, n enteros mayores que 1, valen las siguientes propiedades:

1.
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \quad \text{sólo si} = \begin{cases} \text{n impar} \\ \text{n par, } a \geq 0 \text{ y } b \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.89.

$$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4}.\sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$$

Ejemplo 1.90.

$$\sqrt[3]{8 \cdot (-27)} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-27} = 2 \cdot (-3) = -6$$

2.
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{sólo si} = \begin{cases} n \text{ impar y } b \neq 0 \\ n \text{ par, } a \geq 0 \text{y } b > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.91.
$$\sqrt{\frac{121x^4}{64y^2}} = \frac{\sqrt{121x^4}}{\sqrt{64y^{12}}} = \frac{11x^2}{8y^6}$$

3.
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{sólo si} = \begin{cases} \text{n impar} \\ n \text{ par y } a \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.92.

$$\left(\sqrt[3]{-2}\right)^6 = \sqrt[3]{(-2)^6} = \sqrt[3]{64} = 4$$

4.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \quad \text{sólo si} = \begin{cases} a \geq 0 \\ a < 0 \text{ y } n, m \text{ impares} \end{cases}$$

Ejemplo 1.93.

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

1.5.3. Potencia con exponente racional positivo.

Hasta el momento dimos la definición de potenciación cuando el exponente es un número entero, nos queda ahora por definir el concepto de potenciación cuando el exponente es un número racional.

Comenzamos primero definiendo la potenciación cuando el exponente es un número racional de la forma $\dfrac{1}{n}$.

Definición 1.94. Siendo n un número entero mayor que 1 y a un número real, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo 1.95.

$$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

Definiremos ahora la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ donde el exponente es un número racional positivo. Si la propiedad $a^{n.m} = (a^n)^m$ vale para exponentes racionales, teniendo en cuenta que el cociente $\dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{n}m$, la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ puede adoptar las siguientes formas equivalentes:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

De aquí que deducimos la siguiente definición para $a^{\frac{m}{n}}$:

Definición 1.96. Sean m, n números enteros positivos con $n > 1$ y a y $\sqrt[n]{a}$ números reales, definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

si $a \geq 0$ ó $a < 0$ y n impar, resulta $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ejemplo 1.97.

$$25^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125, \quad \text{que coincide con} \quad \sqrt{25^3} = \sqrt{15625} = 125$$

Observación 1.98. Sacar raiz y luego elevar: $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$ es igual a elevar y luego sacar raiz: $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ cuando $\sqrt[n]{a}$ es real.

1.5.4. Potencia con exponente racional negativo.

Consideremos ahora la expresión $a^{-\frac{m}{n}}$ con m y n enteros positivos tal que ambos no tienen factores comunes enteros distintos que 1, las propiedades dadas anteriormente, nos permiten escribir:

$$a^{-\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{-m} = \frac{1}{(a^{\frac{1}{n}})^m}$$

Definimos la potencia de exponente racional negativo, de la siguiente forma:

Definición 1.99. Sean m, n números enteros positivos con $n > 1$ y tanto a como $\sqrt[n]{a}$ son números reales, con $a \neq 0$:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}$$

Ejemplo 1.100.

$$32^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{32})^2} = \frac{1}{2^2}$$

Observación 1.101. Todas las propiedades de potenciación mencionadas en la sección 1.5.1 se verifican para potencias con exponente racional.

Ejemplo 1.102.

$$\text{Si } a > 0 : \frac{a^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt{a}a^{-\frac{7}{6}}} = \frac{a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{7}{6}}} = a^{-\frac{2}{3}-(\frac{1}{2}-\frac{7}{6})} = a^0 = 1$$

Ejemplo 1.103. Sea $x,\ y,\ a$ números reales, con $a \neq 0$. Reducimos las siguientes expresiones, aplicando propiedades de potenciación y radicación.

1.

$$\begin{aligned} 3a.3a^2.(3a)^{-3} &= 3^{1+1+(-3)}.a^{1+2+(-3)} \quad \text{(Producto de potencias de igual base.)} \\ &= 3^{-1}a^0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{ax^2y^{\frac{-1}{3}}}{2x^{\frac{-1}{2}}y^3} &= \frac{ax^{2-(\frac{-1}{2})}y^{(\frac{-1}{3}-3)}}{2} \quad \text{(Cociente de potencia de igual base.)} \\ &= \frac{ax^{\frac{5}{2}}y^{\frac{-10}{3}}}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.104. Resolver aplicando propiedades de potenciación y radicación. Donde $a,\ x,\ y$ y z son números reales positivos distintos de cero.

1. $\dfrac{\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^3}}}{x^{-2}}$

2. $\sqrt[3]{x^2z^5}\cdot\sqrt[3]{x^7z}$

3. $\left(\dfrac{\left(2\cdot\frac{3}{9}:3\right)^{-2}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}\right)^{-1}$

4. $\dfrac{(3z^2y^{-1})^5}{(4y^5z^{-3})^{-2}}$

5. $\dfrac{a^2\left(2^3\cdot c^{-2}\right)}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3\right)^{-2}}-2\left(\dfrac{c}{\left(a^2\cdot 2^{-1}\right)^2}\right)^{-2}$

6. $\dfrac{x^{-2}+x^{-3}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

7. $\dfrac{x^{-3}\sqrt[3]{x^4}}{x^{-2}\sqrt{x}}$

8. $\sqrt[3]{x^2\sqrt{ax}}$

9. $3\left((2\cdot 3)^{-1}\frac{1}{2^3}\right)\left(3\cdot 2^2\right)^{-2}$

10. $\sqrt[3]{\left(2^{-3}+\frac{13}{4}\right)}-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}+\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-1}$

Solución:

1. $x^{\frac{9}{4}}$
2. x^3z^2
3. $\dfrac{5}{8}$
4. $3^54^2z^4y^5$

5. 0

6. $x^{-\frac{5}{2}} + x^{-\frac{7}{2}}$

7. $x^{-\frac{1}{6}}$

8. $a^{\frac{1}{6}}x^{\frac{5}{6}}$

9. $\dfrac{1}{2^8 \cdot 3^2}$

10. $-\dfrac{25}{12}$

1.5.5. Notación Científica

Definición 1.105. Decimos que un número x está escrito en notación científica cuando se expresa en la forma

$$x = a \cdot 10^n \text{ donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \in \mathbf{Z}$$

Para entender la idea de este tema debemos considerar un concepto general, que es que el producto entre dos números se puede mantener constante aún modificando esos números o esos factores. Por ejemplo, si tenemos:

$$6 \cdot 4 = 24$$

y cambiamos el 6 por 8 y el 4 por 3, el producto también nos da:

$$8 \cdot 3 = 24$$

es decir se mantiene el producto; pues la idea es que al aumentar un número, el otro debe disminuir en la misma proporción para que el producto sea el mismo. Este es el concepto general que se va a utilizar para llevar un número muy grande o un número muy chico a expresarlo en notación científica. Por ejemplo, supongamos que queremos escribir el número 2400 en notación científica; siguiendo el concepto general: Se considera el siguiente producto:

$$2400 \cdot 10^0 = 2400$$

Ahora lo vamos a multiplicar por 10 y dividir por 10, para no modificar el valor por el que se partió. La idea de dividir por 10 es para indicar, con esto, que la coma se corre un lugar.

$$\underbrace{\underbrace{\frac{2400}{10}}_{240} \cdot \underbrace{10^0 \cdot 10}_{10^1}}_{240 \cdot 10 \ = \ 2400} = 2400$$

Nuevamente multiplicamos por 10 y dividimo por 10 el producto obtenido:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{240}{10}}_{24} . \underbrace{10.10}_{10^2}}_{24.10^2 \ = \ 2400} = 2400$$

Nuevamente multiplicamos por 10 y dividimos por 10 el producto obtenido:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{24}{10}}_{2,4} . \underbrace{10^2.10}_{10^3}}_{2,4.10^3 \ = \ 2400} = 2400$$

Finalmente obtuvimos que $2,4.10^3 = 2400$, es decir, expresamos al número 2400 en notación científica. En resumen, lo que buscamos aquí es escribir al número: $2400 \cdot 10^0$, en donde a 2400 se lo llama **coeficiente** y a 10^0 la parte de **Notación Científica**, como una única cifra con parte entera y que la misma no sea cero, es decir que sea una **cifra significativa**; esto es que tome cualquier valor entre 1 y 9.

Se llega así a que $2,4 \cdot 10^3$ es lo mismo que 2400. Los conceptos que usamos hasta el momento son, que el producto de dos números puede permanecer igual a pesar de que se cambien los factores que se multiplican, y por otro lado que al multiplicar por 10 y dividir por 10 al número original, ese número no cambia y de esta manera podemos aumentar en este caso la potencia de 10 y disminuir el coeficiente corriendo la coma. En la práctica el procedimiento que antes realizamos no se lo aplica, sino que realizamos lo siguiente: tomamos al número, ubicamos la coma y la corremos tantos lugares hasta llegar a un número que esté entre 1 y 9; luego se multiplica al número resultante por 10 elevado al número que se corresponde con los lugares que se corrió la coma, pues la potencia de 10 aumenta en una unidad por cada lugar de la coma que se corra a la izquierda. Con respecto al ejemplo dado al comienzo es:

$$\underbrace{2400,}_{\text{la coma se corre 3 lugares}}$$

$$\text{resultando}$$

$$2,4 \cdot 10^3$$

Veamos ahora que pasa cuando tenemos un número muy chico y lo queremos llevar a una expresión más simple, es decir, lo queremos escribir en notación científica. Usando el proceso antes usado tenemos

$$0,0081 = 0,0081 \cdot 10^0$$

Acá vamos a multiplicar por 10 al 0,0081 y dividir por 10 al 10^0

$$\underbrace{\underbrace{0,0081 \cdot 10}_{0{,}081} \cdot \underbrace{\frac{10^0}{10}}_{10^{-1}}}_{0{,}081 \cdot 10^{-1} = 0{,}0081} = 0,0081$$

El hecho de multiplicar por 10 al $0,0081$ hace que la coma se corra un lugar hacia la derecha, y el dividir por 10 es para no modificar el número dado. Volvemos a aplicar nuevamente esta idea:

$$\underbrace{\underbrace{0,081 \cdot 10}_{0{,}81} \cdot \underbrace{\frac{10^{-1}}{10}}_{10^{-2}}}_{0{,}81 \cdot 10^{-2} = 0{,}0081} = 0,0081$$

Nuevamente se vuelve a aplicar este proceso, pero ahora si se ha terminado, pues se obtuvo un número entre 1 y 9, es decir se obtuvo una cifra significativa como parte entera.

$$\underbrace{\underbrace{0,81 \cdot 10}_{8{,}1} \cdot \underbrace{\frac{10^{-2}}{10}}_{10^{-3}}}_{8{,}1 \cdot 10^{-3} = 0{,}0081} = 0,0081$$

Nuevamente realizar este proceso para pasar un número a notación científica, es muy tedioso, largo y complicado; es por eso que en la práctica realizamos lo siguiente: se toma al número, se ubica la coma y se la corre tantos lugares hacia la derecha, hasta que nos quede una única cifra significativa como parte entera. Volviendo a nuestro ejemplo:

$$\underbrace{0,0081}$$

la coma se corre 3 lugares

resultando

$$8,1.10^{-3}$$

De esta manera se tiene que el valor $0,0081$ aumentó a $8,1$, entonces el factor 10^0 debe disminuir a 10^{-3}, es decir, disminuye en tantas potencias de 10 como lugares se corrió la coma hacia la derecha.

Ejemplo 1.106. Pasaje a Notación científica de los siguientes números:

1.
$$743,788 = 7,43788 \cdot 10^2$$

2.
$$\underbrace{\underbrace{0,007680}_{7,680 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{-5}}_{7,680 \cdot 10^{-3+(-5)} = 7,680 \cdot 10^{-8}}$$

Ejercicio 1.107. Al multiplicar el número $1,789$ por 10^5¿la coma se desplaza hacia la derecha o hacia la izquierda? ¿cuántos lugares?

Solución: La coma se corre hacia la derecha 5 lugares.

Ejercicio 1.108. ¿Cuáles de los siguientes números están escritos en notación científica?

1. $0,641 \cdot 10^3$
2. $2 \cdot 10^1$
3. $9,999 \cdot 10^4$
4. $4,38 \cdot 5^{10}$

Solución: La opción correcta es la 2) y la 3).

Ejercicio 1.109. El auto de María pesa alrededor de 1600kg. Ana, Juan y María escribieron por separado el peso del auto en notación científica. María escribió $16,0 \cdot 10^2$, Juan escribió $0,16 \cdot 10^4$ y Ana escribió $1,6 \cdot 10^3$ ¿Cuál de todos escribió la cantidad correcta en notación científica?

Solución: Ana escribió correctamente el peso en notación científica.

Ejercicio 1.110. La masa de un Protón es aproximadamente de $1,7 \cdot 10^{-24}$ gramos. Escribe este número en notación decimal.

Solución: $0,00000000000000000000000017$

Ejercicio 1.111. Pasar a notación científica los siguientes números:

1. 53200000
2. $0,000000789$
3. $7420 \cdot 10^2$
4. 4300000
5. $0,00008$
6. $0,25$

Solución:

1. $5,32 \cdot 10^7$
2. $7,89 \cdot 10^{-7}$
3. $7,42 \cdot 10^5$
4. $4,3 \cdot 10^6$
5. $8 \cdot 10^{-5}$
6. $2,5 \cdot 10^{-1}$

Ejercicio 1.112. Transformar los siguientes números dados en notación científica a notación decimal:

1. $4,2 \cdot 10^5$
2. $1,16 \cdot 10^{-3}$
3. $5,018 \cdot 10^{-6}$
4. $5,3 \cdot 10^4$
5. $2,15 \cdot 10^{-3}$

Solución:

1. 420000
2. $0,00116$
3. $0,000005018$
4. 53000
5. $0,00215$

Capítulo 2

Ecuaciones e Inecuaciones

2.1. Ecuaciones

Una *expresión algebraica* es una expresión matemática en las cuales se combinan números, letras y operaciones.

Definición 2.1. Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece un valor desconocido llamado incógnita. Habitualmente la incógnita será representada por la letra x, aunque puede denotarse con cualquier letra del alfabeto.

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita, es decir, determinar un valor real que hace verdadera a la igualdad. A este valor se lo denomina **Solución** o **Raíz.** Las ecuaciones pueden no tener solución, o bien tener una, varias o infinitas soluciones. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación se denomina **Conjunto Solución**. Para encontrar el conjunto solución necesitamos determinar **ecuaciones equivalentes** a la ecuación dada.

Definición 2.2. Dos ecuaciones son **Equivalentes** cuando tienen el mismo conjunto solución.

Los siguientes procedimientos nos permiten obtener ecuaciones equivalentes:

1. Sumando (o restando) una constante o expresión en x, a ambos miembros de la ecuación.

2. Multiplicando (o dividendo) ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero.

La finalidad de obtener ecuaciones equivalentes es para que la ecuación que nos quede finalmente sea más fácil de resolver que la dada. Veamos esta situación con un ejemplo.

Ejemplo 2.3. Para encontrar el conjunto solución de la ecuación $-5x = 3x + 24$ realizamos los siguientes pasos que determinan ecuaciones equivalentes a la dada:

1. *Restamos* $(3x)$ *en ambos lados de la igualdad:*

$$\begin{aligned} -5x - (3x) &= 3x + 24 - (3x) \\ -8x &= 24 \end{aligned}$$

2. *Dividimos por (-8) ambos miembros. Esta nueva ecuación equivalente permite obtener el valor de x que es solución de la ecuación.*

$$\begin{aligned} \frac{(-8)}{(-8)}x &= \frac{24}{(-8)} = -3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Verifiquemos que el resultado obtenido es la solución correcta de la ecuación. Para ello se reemplaza en la ecuación dada por este valor y si se obtiene la identidad la solución es la correcta:

$$-5(-3) \ ? \ 3(-3) + 24$$

$$15 \ ? \ -9 + 24$$

$$\rightarrow \qquad 15 = 15$$

Por lo tanto (-3) es la solución de la ecuación.

Las ecuaciones que trabajaremos en este protolibro, son las de primer grado en una variable o incógnita (la incógnita está elevada a la uno) y las ecuaciones de segundo grado en una variable o incógnita (la incógnita está elevada a la dos).

2.1.1. Ecuaciones de Primer Grado

Definición 2.4. Una ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde $a, \ b \in \ \mathbf{R}$ y $a \neq 0$, recibe el nombre de **Ecuación de Primer Grado** en una variable o incógnita.

Observación 2.5. La ecuación lineal $ax + b = 0$ con $a,\ b$ números reales y $a \neq 0$ tiene solución única y el conjunto solución es:

$$S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

Ejemplo 2.6. Vamos a resolver la siguiente ecuación:

$$6x + 2 - 3x = 7x + 4$$

Resolución: Para encontrar el conjunto solución, obtenemos ecuaciones equivalentes de esta manera:

1. *Restamos* $(-7x)$ *en ambos miembros:*

$$6x + 2 - 3x - 7x = 7x + 4 - 7x$$

2. *Restamos* (-2) *en ambos miembros:*

$$6x + 2 - 3x - 7x - 2 = 4 - 2$$

3. *Asociamos los valores con* x *de un lado de la igualdad y del otro lado los valores constantes:*

$$-4x = 2$$

4. *Dividimos todo por* (-4) :

$$x = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Verificación: Es conveniente verificar que el resultado obtenido satisface la ecuación. Para ello se reemplaza en la ecuación dada este valor y si se obtiene una identidad, la solución es correcta.

$$\underbrace{6\left(-\frac{1}{2}\right)+2-3\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} \; ? \; \underbrace{7\left(-\frac{1}{2}\right)+4}_{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ es solución de la ecuación.}$$

Repuesta: El conjunto solución es:

$$S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Ejemplo 2.7. Vamos a resolver la siguiente ecuación:

$$1,5+4(x-0,5)=3x-0,5$$

Resolución: Para encontrar el conjunto solución, obtenemos ecuaciones equivalentes de esta manera:

1. *Pasamos a fracción todos los números decimales:*

$$\frac{3}{2}+4\left(x-\frac{1}{2}\right)=3x-\frac{1}{2}$$

2. *Aplicamos propiedad distributiva:*

$$\frac{3}{2}+4x-\frac{4}{2}=3x-\frac{1}{2}$$

3. *Restamos* $(3x)$ *en ambos miembros:*

$$\frac{3}{2} + 4x - \frac{4}{2} - 3x = 3x - \frac{1}{2} - 3x$$

4. *Restamos* $\left(\frac{3}{2}\right)$ y sumamos $\left(\frac{4}{2} = 2\right)$ *en ambos miembros:*

$$\frac{3}{2} + 4x - 2 - 3x - \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2$$

5. *Asociamos los valores con* x *de un lado de la igualdad y del otro lado los valores constantes:*

$$x = 0$$

Verificación: Es conveniente verificar que el resultado obtenido satisface la ecuación. Para ello reemplazamos en la ecuación dada este valor y si se obtiene una identidad, la solución es correcta.

$$\underbrace{1,5 + 4(0 - 0,5)}_{\frac{-1}{2}} \; ? \; \underbrace{3.0 - 0,5}_{\frac{-1}{2}}$$

$\therefore$ 0 *es solución de la ecuación.*

Repuesta: El conjunto solución es:

$$S = \{0\}.$$

Ejemplo 2.8. Vamos a resolver ahora la siguiente ecuación:

$$2 - (3x - 5) = 4 - 2x + 3 - x$$

Resolución: Para encontrar el conjunto solución, obtenemos ecuaciones equivalentes de esta manera:

1. *Aplicamos propiedad distributiva:*

$$2 - 3x + 5 = 4 - 2x + 3 - x$$

2. *Sumamos* $2x$ y x *en ambos miembros:*

$$2 - 3x + 5 + 2x + x = 4 - 2x + 3 - x + 2x + x$$

3. *Restamos* 2 *y* 5 *en ambos miembros:*

$$2 - 3x + 5 + 2x + x = 4 + 3 - 2 - 5$$

4. *Asociamos los valores con* x *de un lado de la igualdad y del otro lado los valores constantes:*

$$0x = 0$$

Luego obtenemos con este resultado que la ecucación tiene infinitas soluciones, es decir, admite como solución cualquier número real. ($S = \mathbf{R}$*)*

Ejemplo 2.9. Vamos a resolver la siguiente ecuación:

$$3(x + 4) - 6x = 8 - 3(x + 5)$$

Resolución: Para encontrar el conjunto solución, obtenemos ecuaciones equivalentes de esta manera:

1. *Aplicamos propiedad distributiva:*

$$3x + 12 - 6x = 8 - 3x - 15$$

2. *Sumamos* $3x$ *en ambos miembros:*

$$3x + 12 - 6x + 3x = 8 - 3x - 15 + 3x$$

3. *Restamos* (-12) *en ambos miembros:*

$$3x + 12 - 6x + 3x - 12 = 8 - 15 - 12$$

4. *Asociamos los valores con* x *de un lado de la igualdad y del otro lado los valores constantes:*

$$0x = -19$$

Vemos entonces que la ecuación no tiene solución real alguna, pues 0 *es distinto de* -19 *con lo cual la expresión* $0 = -19$ *representa un absurdo. Así* $S = \varnothing$.

Ejercicio 2.10. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado:

1. $\dfrac{17}{5}x = -\dfrac{8}{5}x + 150$
2. $7(x-2) + 9 = 10x - 4(-3 - x)$
3. $\dfrac{1}{2}(x-5) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{6}(x-2)$
4. $\dfrac{2}{3}\left[x - \left(1 - \dfrac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$

5. $2(x+1)-3(x-2)=-x+6$
6. $2x+2-3(x-2)=-x+6$
7. $2-(3x-5)=4-2x+3-x$
8. $6\left(\dfrac{x+1}{8}-\dfrac{2x-3}{16}\right)=3\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{3}{8}(3x-2)$

Solución:

1. $S=\{30\}$
2. $S=\left\{-\dfrac{17}{7}\right\}$
3. $S=\{-1\}$
4. $S=\{-1\}$
5. $S=\varnothing$
6. $S=\varnothing$
7. $S=\mathbf{R}$
8. $S=\left\{\dfrac{15}{9}\right\}$

Ejercicio 2.11. Se sabe que la ecuación:

$$(2a-1)(x+1)+x=a$$

tiene por solución $x=-2$. ¿Cuál es el valor de a?

Solución: $a=-\dfrac{1}{3}$

2.1.2. Ecuaciones de Segundo Grado

Definición 2.12. Una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{donde } a,\ b\ \text{ y } c\ \in\ \mathbf{R} \text{ y } a \neq 0,$$

recibe el nombre de **Ecuación de Segundo Grado** en la variable x.

Ejemplo 2.13.

$$6x^2 + 7x - 3 = 0 \quad \text{donde } a = 6,\ b = 7 \text{ y } c = -3.$$

Ejemplo 2.14.

$$x^2 - 7 = 0 \quad \text{donde } a = 1 \text{ y } c = -7.$$

Ejemplo 2.15.

$$-4x + 3x^2 = 0 \quad \text{donde } a = 3 \text{ y } b = -4.$$

Para determinar la solución de la ecuación de segundo grado, existe una fórmula resolvente, denominada fórmula resolvente de Bhaskara, definida por:

$$x_1,x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

en donde x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación. El valor $\Delta = b^2 - 4.a.c$ se llama **Discriminante** de la ecuación cuadrática, y nos indica la cantidad de soluciones que tiene esta ecuación en el conjunto de los números reales, pues como vemos en la fórmula resolvente de Bhaskara, es lo que está dentro de la raíz cuadrada, entonces si:

i. $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas; pues existe la raiz cuadrada de un número positivo.

ii $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real, pues la raiz cuadrada de 0, es 0, entonces se anularía en la fórmula resolvente el término $\pm\sqrt{b^2 - 4.a.c}$, y de ahí que la única solución sea $\dfrac{-b}{2a}$.

iii. $\Delta < 0$ la ecuación no tiene solución real, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo y por lo tanto no se podría aplicar la fórmula resolvente de Bhaskara.

Observación 2.16. *Sean* x_1, x_2 *dos soluciones de la ecuación cuadrática* $ax^2 + bx + c = 0$, *podemos expresar a la misma en* ***forma factorizada****, de la siguiente manera:*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo 2.17. Vamos a resolver la siguiente ecuación cuadrática:

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

Resolución: Primero determinamos el valor del discriminante:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 81$$

como es una valor positivo, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales.

Apliquemos la fórmula resolvente para determinar las soluciones de la ecuación:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 + 9}{6} = 1$$

y

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 - 9}{6} = -2$$

Luego $x_1 = 1$ *y* $x_2 = -2$ *son las soluciones de la ecuación dada. Expresada en forma factorizada nos queda:*

$$3x^2 + 3x - 6 = 3(x - 1)(x - (-2)) = 3(x - 1)(x + 2).$$

Ejemplo 2.18. Vamos a resolver la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Resolución: Primero determinamos el valor del discriminante:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

como es una valor negativo la ecuación cuadrática no tiene solución real.

Ejercicio 2.19. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado. En el caso de que tenga raíces reales expresar a la ecuación en forma factorizada.

1. $2x^2 + 4x - 6 = 0$
2. $x^2 + 2x + 1 = 0$
3. $-2x^2 + x = 0$
4. $x^2 - 2x + 2 = 0$

5. $4x + x^2 - 2x = 0$

6. $2 + x^2 - 2x = 0$

7. $x^2 - 6x = -9$

Solución:

1. $S = \{-3;\ 1\} \ \rightarrow \ 2x^2 + 4x - 6 = 2(x-1)(x+3)$

2. $S = \{-1\} \ \rightarrow \ x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

3. $S = \{0;\ \frac{1}{2}\} \ \rightarrow \ -2x^2 + x = -2x\left(x - \frac{1}{2}\right)$

4. $S = \varnothing$

5. $S = \{-3;\ 1\} \ \rightarrow \ x^2 + 4x - 6 = (x-1)(x+3)$

6. $S = \varnothing$

7. $S = \{3\} \ \rightarrow \ x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Otro de los métodos que vamos a utilizar para resolver una ecuación cuadrática, es el **Método de Completar Cuadrados.** Para entender este concepto recordemos dos igualdades denominadas cuadrados de un binomio:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2a.b + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2a.b + b^2 \end{aligned}$$

El proceso de completar cuadrados aplicado sobre la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se realiza aplicando los siguientes pasos:

1. Se suma el opuesto del término independiente (c) miembro a miembro.

2. Se dividen todos los términos por el valor de a (coeficiente que acompaña a x^2).

3. Se suma en ambos lados de la igualdad, el cuadrado de la mitad del coeficiente que acompaña al término lineal.

4. Finalmente en uno de los lados de la igualdad queda el desarrollo del binomio al cuadrado.

Veamos esto:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
ax^2 + bx + c + (-c) &= 0 + (-c) \\
\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} &= \frac{-c}{a} \\
x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4.c.a}{4a^2}
\end{aligned}$$

En donde al despejar x de ésta última expresión, obtenemos las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4.c.a}{4a^2}}-\frac{b}{2a}\\
x_{1,2} &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4.c.a}}{2a}\\
x_{1,2} &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}
\end{aligned}
$$

que justamente se corresponden a las soluciones que obtuvimos aplicando la fórmula resolvente de Bhaskara. De esta manera el método de completar cuadrados nos demuestra de donde proviene la fórmula resolvente de Bhaskara.

Ejemplo 2.20. Debemos hallar el conjunto solución de la ecuación

$$2x^2+6x-5=0$$

aplicando el método de completar cuadrados.

1. *Sumamos miembro a miembro* $5:$

$$2x^2+6x=5$$

2. *Dividimos todos los términos por* $2:$

$$\frac{2}{2}x^2+\frac{6}{2}x=\frac{5}{2}$$

3. *Sumamos en ambos lados de la igualdad el cuadrado de un medio de* $3:$

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

4. *Luego nos queda el desarrollo del binomio al cuadrado de* $\left(x+\frac{3}{2}\right)$ *y del otro lado un valor constante*:
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{19}{4}$$

5. *Finalmente las soluciones de la ecuación son:*
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{19}{4}} - \frac{3}{2}.$$
es decir:
$$x_1 = \frac{\sqrt{19}}{2} - \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{19}}{2} - \frac{3}{2}$$

Ejemplo 2.21. *Resolvamos ahora, completando cuadrados, la siguiente ecuación:*
$$x^2 - 7x - 18 = 0$$

1. *Sumamos miembro a miembro el opuesto del término independiente, en nuestro caso* 18 :
$$\begin{aligned} x^2 - 7x - 18 + 18 &= 18 \\ x^2 - 7x &= 18 \end{aligned}$$

2. *Sumamos en ambos miembros el cuadrado de un medio del coeficiente que acompaña al término lineal:*
$$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 18 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

3. *En el lado izquierdo de la igualdad nos queda el desarrollo del binomio al cuadrado de* $\left(x - \frac{7}{2}\right)$ *y del otro lado un valor constante*:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

4. *Las soluciones de la ecuación de segundo grado son:*

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{121}{4}} + \frac{7}{2}$$

es decir:

$$x_1 = \frac{11}{2} + \frac{7}{2} \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\frac{11}{2} + \frac{7}{2}$$

Ejercicio 2.22. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado por el método de completar cuadrados:

1. $x^2 + 2x + 1 = 0$
2. $x^2 + x - 6 = 0$
3. $x^2 - 4x + 3 = 0$
4. $x^2 - 8x = -4$
5. $2x^2 - 6x - 16 = 0$

Solución:

1. $S = \{-1\}$
2. $S = \{-3;\ 2\}$

3. $S = \{1;\ 3\}$

4. $S = \left\{\sqrt{12} + 4;\ -\sqrt{12} + 4\right\}$

5. $S = \left\{\sqrt{\dfrac{41}{4}} + \dfrac{3}{2};\ -\sqrt{\dfrac{41}{4}} + \dfrac{3}{2}\right\}$

Ejercicio 2.23. Para qué valores de k, la ecuación :

$$kx^2 - kx + 1 = 0$$

admite una única solución.

Solución: $k = 4$

2.1.3. Ecuaciones como Modelo Matemático.

Muchas veces se requiere del planteo de una ecuación para resolver distintas situaciones problemáticas; es decir, se requiere de ecuaciones como Modelo Matemático. En las diferentes situaciones problemáticas deben identificarse claramente:

a. los datos;

b. las incógnitas;

c. las condiciones que las incógnitas deben cumplir.

Los pasos a seguir para la resolución de situaciones problemáticas son los siguientes:

1. **Lea** cuidadosamente el problema hasta comprender su enunciado.
2. **Identifique** los datos e incógnita del problema; y utilice una variable para representar a la incógnita, por ejemplo x.
3. **Traduzca** al lenguaje simbólico el enunciado del problema, planteando una o varias ecuaciones.
4. **Resuelva** la o las ecuaciones planteadas.
5. **Verifique** la solución encontrada.
6. **Concluya** respondiendo a la o las preguntas del problema.

Comencemos planteando situaciones problemáticas que requieren de ecuaciones de primer grado para su resolución.

Ejemplo 2.24.

Se pintan de rojo los tres séptimos de un poste y luego, los cinco sextos del resto. Si aún quedan dos metros sin pintar, ¿Cuál es la altura del poste?

Solución: Se considera como incógnita, x, la altura del poste, pues es el valor que se desconoce y que pide el problema; luego la ecuación que plantea la situación problemática es:

$$\frac{3}{7}x + \frac{5}{6}(x - \frac{3}{7}x) + 2 = x$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{3}{7}x + \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}x - x &= -2\\ -\frac{2}{21}x &= -2\\ x &= 21\end{aligned}$$

Respuesta: La altura del poste es de 21 *metros.*

Ejemplo 2.25.
Una persona gasta la sexta parte de su sueldo y luego las tres cuartas partes del resto. Si aún le quedan 3750 ¿Cuál es su sueldo?

Solución: Consideramos como incógnita, x, el sueldo de la persona, pues es lo que nos pregunta el problema, y por lo tanto es el valor desconocido; luego la ecuación que planteamos frente a la situación problemática dada es:

$$\frac{1}{6}x + \frac{3}{4}(x - \frac{1}{6}x) + 3750 = x$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}x + \frac{5}{8}x - x &= -3750\\ -\frac{10}{48}x &= -3750\\ x &= 18000\end{aligned}$$

Respuesta: El sueldo de la persona es de \$18000.

Ejercicio 2.26. Escribir en forma simbólica los siguientes enunciados:

1. Un número x y su consecutivo suman 23.

2. z es el número natural que sumado a 12 da 26.

3. Juan tiene 16 años . La suma de su edad y la mía es igual a 50.

4. El largo de un campo de fútbol es el doble del ancho mas 10 metros.

Ejercicio 2.27. Resolver los siguientes problemas:

1. **El perímetro de un jardín rectangular es de** $58m.$ **Si el lado mayor mide** $11m.$ **mas que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?**

Solución: *Los lados del jardín miden* $9m.$ *y* $20m.$

2. **Roberto obtuvo las calificaciones siguientes en distintos examenes de biología:** $73,\ 62,\ 58$ **y** $64.$ **¿Qué calificación debe obtener en un próximo examen para que su promedio sea de** 70**?**

Solución: *Su calificación debe ser de* 93 *puntos.*

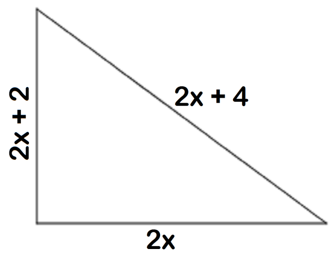
3. **Durante una prueba realizada en una fábrica que produce latas, se obtuvo que la máquina A produce x latas, la máquina B el doble de A y la máquina C, 6 latas mas que A. La prducción total fue de 3810 latas. ¿Cuántas latas produjo cada máquina?**

Solución: *La máquina A produjo* 951 *latas, la máquina* B, 1902 *latas y la máquina* C, 957 *latas.*

Tal como se presentó en las ecuaciones de primer grado también podemos encontrar situaciones problemáticas que se modelizan utilizando ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 2.28.

Hallar x considerando el triángulo rectángulo de la figura:



Solución: La ecuación que representa a la situación problemática la obtenemos de aplicar Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura:

$$\begin{aligned}(2x+4)^2 &= (2x+2)^2+(2x)^2\\ 4x^2+16x+16 &= 4x^2+8x+4+4x^2\\ 4x^2-8x-12 &= 0\end{aligned}$$

resolviendo ésta ecuación obtenemos como resultados:

$$x_1 = 3 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -1$$

Luego el valor de $x = 3$ *es la solución buscada, pues de ser* $x = -1$, $2x$ *y* $(2x+2)$ *no representarían las longitudes de un triángulo.*

Respuesta: El valor de x es 3.

Ejercicio 2.29. Resolver el siguiente problema:

Calcular un número natural tal que, la suma del mismo y la tercera parte del cuadrado de su consecutivo sea 35.

Solución: *El número natural es* 8.

2.2. Inecuaciones

Definición 2.30. Una **inecuación** o **desigualdad** es una relación entre dos expresiones algebraicas que no siempre son iguales y por lo tanto se relacionan con los símbolos $>$, $\geq$, $<$ y $\leq$.

Ejemplo 2.31.

$$3x - 7 < 6(x - 2)$$

Resolver una desigualdad es encontrar el conjunto de todos los números reales que hacen que la desigualdad sea verdadera; este conjunto solución por lo general es un intervalo completo de números reales o, en otros casos, la unión de tales intervalos.

2.2.1. Intervalos

Para indicar subconjuntos de números reales se emplea la siguiente notación: Dados $a,\ b\ \in \mathbf{R}$, $a < b$, se define:

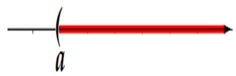
1. $(a;\ b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ Intervalo abierto.

2. $[a;\ b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$ Intervalo semiabierto.

3. $(a;\ b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$ Intervalo semiabierto.

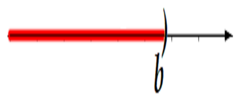
4. $[a;\ b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ Intervalo cerrado.

5. $(a;\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$

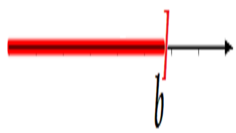


6. $[a;\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$

7. $(-\infty;\ b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$

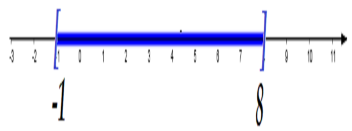


8. $(-\infty;\ b] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$

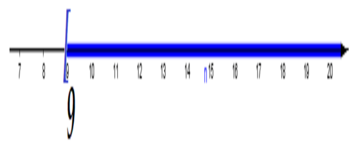


Ejemplo 2.32. Escribamos cada desigualdad usando la notación de Intervalos; grafiquemos a los mismos en la recta real, donde $x \in \mathbf{R}$.

1. $-1 \leq x \leq 8$



2. $x \geq 9$



2.2.2. Resolución de Desigualdades.

El procedimiento para resolver una inecuación o desigualdad consiste en transformar a la desigualdad de a un paso a la vez, hasta que el conjunto solución sea obvio. Podemos realizar ciertas operaciones, que se corresponden con las propiedades del orden en los reales, en ambos lados de la desigualdad sin cambiar su conjunto solución. En particular:

1. Podemos sumar el mismo número a ambos lados de una desigualdad.

2. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número positivo.

3. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número negativo, pero entonces debemos invertir el sentido del signo de la desigualdad.

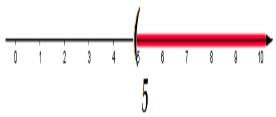
Ejemplo 2.33. Vamos a resolver la siguiente inecuación:

$$3x < 5x - 10$$

Solución:

$$\begin{aligned} 3x - 5x &< 5x - 10 - 5x && \text{sumamos } (-5x) \text{ miembro a miembro} \\ -2x &< -10 && \text{multiplicamos por } \left(\frac{-1}{2}\right) \text{ en ambos miembros} \\ x &> \frac{-10}{-2} = 5 \end{aligned}$$

Repuesta: La solución buscada es $(5;\ \infty)$.



Este tipo de desigualdad presentada es una **inecuación lineal o desigualdad de primer grado**; pues el mayor exponente de la incógnita en la desigualdad es de grado uno.

Ejercicio 2.34. Resolver las siguientes inecuaciones de primer grado:

1. $2x - 3 > x + 5$
2. $x + 6 < x + 2$
3. $2(x + 1) - 3(x - 2) < x + 6$
4. $2x - 3 - x < 3x - 4(x - 1)$

Solución:

1. $S = (8;\ \infty)$
2. $S = \varnothing$
3. $S = (1;\ \infty)$
4. $S = \left(-\infty;\ \dfrac{7}{3}\right)$

La desigualdad de **segundo grado** o **inecuación cuadrática** con una incógnita es cualquier desigualdad que, directamente o mediante transformaciones de equivalencia, aplicando las propiedades de orden en **R,** se puede expresar de la forma siguiente:

$$* \ ax^2 + bx + c \ > \ 0, \quad * \ ax^2 + bx + c < 0, \quad * \ ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$\text{ó} \quad * \ ax^2 + bx + c \ \leq \ 0. \quad \text{con } a,\ b,\ c\ \in \mathbf{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Resolver estas inecuaciones consiste en encontrar el o los intervalos de la recta real donde se verifica la desigualdad. Para su estudio lo que se va a realizar es llevar a la desigualdad que está expresada en forma polinómica a su forma factorizada y de ahí bastará con estudiar el signo de los tres factores de acuerdo al signo de la desigualdad y resolver las inecuaciones lineales que quedan.

1. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$, luego debemos analizar:

   a) Si $a \leq 0$ nos queda $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ y de acá analizamos:

      i. $(x - x_1) \geq 0$ y $(x - x_2) \leq 0$ ó

      ii. $(x - x_1) \leq 0$ y $(x - x_2) \geq 0$

Luego la solución de la desigualdad a) es la unión de las soluciones de i. y ii.

b) Si $a \geq 0$ nos queda $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ y de acá analizamos:

i. $(x - x_1) \geq 0$ y $(x - x_2) \geq 0$ ó

ii. $(x - x_1) \leq 0$ y $(x - x_2) \leq 0$

Luego la solución de la desigualdad b) es la unión de las soluciones de i. y ii.

2. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$, luego debemos analizar:

a) Si $a \leq 0$ nos queda $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ y de acá analizamos:

i. $(x - x_1) \geq 0$ y $(x - x_2) \geq 0$ ó

ii. $(x - x_1) \leq 0$ y $(x - x_2) \leq 0$

Luego la solución de la desigualdad a) es la unión de las soluciones de i. y ii.

b) Si $a \geq 0$ nos queda $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ y de acá analizamos:

i. $(x - x_1) \geq 0$ y $(x - x_2) \leq 0$ ó

ii. $(x - x_1) \leq 0$ y $(x - x_2) \geq 0$

Luego la solución de la desigualdad b) es la unión de las soluciones de i. y ii.

De igual manera resolvemos para las desigualdades con $>$ y $<$.

Ejemplo 2.35. Debemos hallar el conjunto solución de la desigualdad:

$$\sqrt{2}(x-1)(x+1) > 0$$

como $a = \sqrt{2} > 0$, la desigualdad que nos queda por resolver es:

$$(x-1)(x+1) > 0$$

debemos analizar entonces:

i. $(x-1) > 0$ y $(x+1) > 0$ ó

ii. $(x-1) < 0$ y $(x+1) < 0$

Resolución:

i. $(x-1) > 0 \rightarrow x > 1$ *y* $(x+1) > 0 \rightarrow x > -1$; *luego la solución es la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones:*

$$S_{i.} = (1;\ +\infty)$$

ii. $(x-1) < 0 \rightarrow x < 1$ *y* $(x+1) < 0 \rightarrow x < -1$; *luego la solución es la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones:*

$$S_{ii.} = (-\infty;\ -1)$$

Finalmente la solución de la desigualdad dada es:

$$S_{i.} \cup S_{ii.} = (1;\ +\infty) \cup (-\infty;\ -1) = (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$$

Ejemplo 2.36. Hallemos el conjunto solución de la desigualdad:

$$x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

Como la desigualdad está expresada en forma polinómica la debemos llevar a su forma factorizada:

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$$

Analizamos aquí para que valores de x, $(x+2)^2$ debe de ser mayor o igual que cero; y esto ocurre para cualquier valor real, entonces la solución de la desigualdad es **R**.

Ejemplo 2.37. Hallemos ahora, el conjunto solución de la desigualdad:

$$x^2 - 6x + 9 < 0$$

Como la desigualdad está expresada en forma polinómica la expresamos en su forma factorizada:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 < 0$$

Analizamos aquí para que valores de x, $(x-3)^2$ debe de ser menor que cero; y esto no ocurre para ningún valor real, pues ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un valor negativo. Por lo tanto la desigualdad no tiene solución real, o bien decimos que tiene solución vacío ($S = \varnothing$).

Otro tipo de inecuaciones que vamos a resolver son las **desigualdades o inecuaciones racionales**, las cuales se resuelven por el método de los signos, como hemos aplicado en las inecuaciones de segundo grado. Veamos un par de ejemplos de esta situación:

Ejemplo 2.38. Debemos hallar el conjunto solución de la desigualdad:

$$\frac{x-2}{x+2} \geq 0$$

Por la regla de los signos debemos analizar dos casos, recordando que el denominador no puede tomar el valor cero:

i. $(x-2) \geq 0$ y $(x+2) > 0$ ó

ii. $(x-2) \leq 0$ y $(x+2) < 0$

Resolución:

i. $(x-2) \geq 0 \rightarrow x \geq 2$ *y* $(x+2) > 0 \rightarrow x > -2$; *luego la solución es la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones:*

$$S_{i.} = [2;\ +\infty)$$

ii. $(x-2) \leq 0 \rightarrow x < 2$ *y* $(x+2) < 0 \rightarrow x < -2$; *luego la solución es la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones:*

$$S_{ii.} = (-\infty;\ -2)$$

Finalmente la solución de la desigualdad dada es la unión de las soluciones obtenidas en i. y ii.:

$$S_{i.} \cup S_{ii.} = (-\infty;\ -2) \cup [2;\ +\infty)$$

Ejemplo 2.39. Debemos hallar el conjunto solución de la desigualdad:

$$\frac{x+1}{x+3} < 2$$

Primero debemos sumar el opuesto de 2 en ambos lados de la desigualdad para poder obtener una inecuación como la del ejemplo anterior y así aplicar la regla de los signos para su resolución:

$$\frac{x+1}{x+3} < 2 \qquad \to \qquad \frac{x+1}{x+3} - 2 < 0 \qquad \to \qquad \frac{-x-5}{x+3} < 0$$

nos queda entonces por analizar:

i. $(-x-5) < 0$ y $(x+3) > 0$ ó

ii. $(-x-5) > 0$ y $(x+3) < 0$

Resolución:

i. $(-x-5) < 0 \to x > -5$ *y* $(x+3) > 0 \to x > -3$; *luego la solución es la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones:*

$$S_{i.} = (-3;\ +\infty)$$

ii. $(-x-5) > 0 \to x < -5$ *y* $(x+3) < 0 \to x < -3$; *luego la solución es la intersección de las soluciones de ambas inecuaciones:*

$$S_{ii.} = (-\infty;\ -5)$$

Finalmente la solución de la desigualdad dada es la unión de las soluciones obtenidas en i. y ii.:

$$S_{i.} \cup S_{ii.} = (-\infty;\ -5) \cup (-3;\ +\infty)$$

Ejercicio 2.40. Indicar si la siguiente resolución es verdadera o falsa, justificando la respuesta.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &< 2 \\ \frac{3}{x}x &< 2x \\ 3 &< 2x \\ \frac{1}{2}3 &< \frac{1}{2}2x \\ \frac{3}{2} &< x \end{aligned}$$

Ejercicio 2.41. Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $x^2 - 6x + 8 > 0$
2. $-x^2 + 4x - 4 < 0$
3. $7x^2 + 21x - 28 < 0$
4. $x^2 + x + 1 < 0$
5. $-2\dfrac{x-1}{x+4} \leq 0$
6. $\dfrac{x-2}{x+1} > 0$
7. $\dfrac{x+4}{x-2} \geq 3$

Solución:

1. $S = (-\infty;\ 2) \cup (4;\ \infty)$
2. $S = \mathbf{R} - \{2\}$
3. $S = (-4;\ 1)$
4. $S = \varnothing$
5. $S = (-\infty;\ -4) \cup [1;\ \infty)$
6. $S = (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$
7. $S = (2;\ 5]$

2.2.3. Inecuaciones en la vida real.

Te encuentras con desigualdades matemáticas casi todos los días, pero tal vez no las notas porque te son familiares. Piensa en las siguientes situaciones: límites de velocidad en la autopista, pagos mínimos en las tarjetas de crédito, la cantidad de gigabyte a consumir en tu celular por mes, el tiempo que te toma llegar a la facultad. Todas estas situaciones pueden ser representadas como desigualdades matemáticas. Y, de hecho, usas pensamiento matemático cuando las consideras cada día. Veamos un ejemplo para entender tal situación.

Ejemplo 2.42.

Un utilitario kangoo pesa $875kg$. La diferencia entre el peso del utilitario vacío y el peso de la carga que lleva no debe ser inferior que $415kg$. Si hay que cargar 4 cajones iguales, ¿Cuánto puede pesar, como máximo cada uno de los cajones para poder llevarlas en el utilitario?

Solución: En primer lugar traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

$$\underbrace{\text{peso del utilitario}}_{875}\ -\underbrace{\text{peso de 4 cajones}}_{4x}\ \underbrace{\text{No es menor que } 415kg.}_{\geq 415}$$

luego la inecuacón que nos queda es:

$$875 - 4x \geq 415$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned} 875 - 4x &\geq 415 \\ -4x &\geq 415 - 875 \\ x &\leq (-460)\left(-\frac{1}{4}\right) \\ x &\leq 115 \end{aligned}$$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los $115kg$. *y además como el peso debe ser positivo, necesariamente el peso de los cajones cae en el intervalo* $(0;\ 115]$.

Ejercicio 2.43. Resolver los siguientes problemas:

1. **Una fábrica paga a sus viajantes $\$10$ por artículo vendido más una cantidad fija de $\$500$. Otra fábrica de la competencia paga $\$15$ por artículo y $\$300$ fijos. ¿Cuánto artículos debe vender el viajante de la competencia para ganar más dinero que el primero?**

Solución: *El viajante debe vender mas de* 40 *artículos.*

2. **Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que $7m$, ¿Qué se puede decir de su perímetro?**

Solución: *El perímetro es mayor o igual que* $28m$.

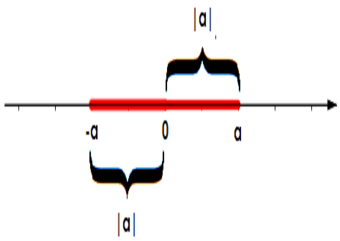
3. **Un coche se desplaza por una ruta a una velocidad comprendida entre $100km/H.$ y $150km/H.$ ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de $3H.$?**

Solución: *La distancia oscila entre* $300km$ *y* $450km.$($300km. \leq distancia \leq\ 450km.$)

2.3. Valor absoluto.

El concepto de **valor absoluto** de un número se puede entender como la *distancia* que existe entre el 0 y el número. Si tomamos un punto cualquiera a y este es positivo, la distancia de a al orígen es igual a a; y si fuera negativo, la distancia de a al orígen es igual a $(-a)$. Esto se debe a que una distancia no puede ser negativa, ya que no tendría sentido. Todas las distancias son positivas y por lo mismo, el valor absoluto de un número, que es una distancia, debe de ser positivo. De manera formal definimos el **valor absoluto de un número** a por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



Ejemplo 2.44.

$$|6| = 6 \qquad |-5| = -(-5) \qquad |0| = 0$$

De manera análoga, se deduce la **distancia que existe entre dos números reales** como el valor absoluto de su diferencia; y se lo indica $|x-a|$ (distancia entre x y a).

Ejemplo 2.45. $|x-4| = 8$ nos representa que la distancia de x a 4 es de 8 unidades. Si nos interesa determinar cual es ese valor de x debemos considerar la definición de valor absoluto dada al comienzo y resolver las ecuaciones que nos quedan:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si } x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & \text{si } x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{si } x \geq 4 \\ -(x-4) & \text{si } x < 4 \end{cases} = 8$$

entonces:

$$\begin{aligned} x-4 &= 8 \rightarrow x = 8+4 = 12 \\ -x+4 &= 8 \rightarrow -x = 8-4 \rightarrow x = -4 \end{aligned}$$

luego $x = 12$ y $x = -4$ son los valores cuya distancia al 4 es de 8 unidades.

Observación 2.46. Como x^2 es un número positivo, independientemente del signo de x y $\sqrt{}$ representa la raíz cuadrada positiva, tenemos la siguiente expresión algebraica para definir el valor absoluto:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

2.3.1. Propiedades de valor absoluto.

Dados $a,\ b$ números reales se verifican las siguientes propiedades:

1. $|a.b| = |a|\,|b|$
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ con $b \neq 0$.
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$
4. $|a-b| \geq ||a| - |b||$

Ejercicio 2.47. Resolver las siguientes ecuaciones con módulo:

1. $|x-2|=5$
2. $|-2x+4|=2$
3. $\left|\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right|=1$
4. $|x+3|=4$

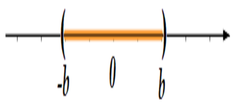
---

1. $S=\{-3;\ 7\}$
2. $S=\{1;\ 3\}$
3. $S=\{-5;\ -1\}$
4. $S=\{1;\ -7\}$

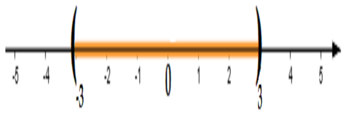
2.3.2. Desigualdades que incluyen valor absoluto.

Como $|x|$ es la distancia entre el número x y el orígen, la solución de la desigualdad $|x|<b$ (con b número real positivo); es el conjunto de los números reales x que están a una distancia menor que b respecto al orígen; en otras palabras x debe de ser menor que b y mayor que $(-b)$; esto es $-b<x<b$. Se tiene así la siguiente proposición cuando $b>0$:

i. $|x|<b$ si y solo sí $-b<x<b$.

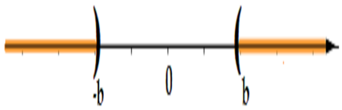


Ejemplo 2.48. $|x|<3$ si y solo sí $-3<x<3$, es decir la solución de esta desigualdad son los x que están entre -3 y 3.

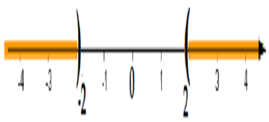


Por otra parte, la solución de la desigualdad $|x| > b$; (con b número real positivo) es el conjunto de los números reales x que están a una distancia mayor que b respecto del orígen; y esto puede suceder cuando $x > b$ o $x < -b$. Se tiene así la siguiente proposición:

ii. $|x| > b$ si y solo si $x > b$ o $x < -b$.



Ejemplo 2.49. $|x| > 2$ si y solo si $x > 2$ o $x < -2$; es decir, la distancia de x al orígen debe de ser mayor que 2.



Análogamente se verifica para $|x| \leq b$ y $|x| \geq b$.

i. $|x| \leq b$ si y solo sí $-b \leq x \leq b$.

ii. $|x| \geq b$ si y solo si $x \geq b$ o $x \leq -b$.

Ejercicio 2.50. Resolver las siguientes desigualdades con módulo:

1. $|x| \leq 3$
2. $|x| > 5$
3. $2\,|x| > 4$
4. $-3\,|x| < -6$

Solución:

1. $S = [-3;\ 3]$
2. $S = (-\infty;\ -\mathbf{5}) \cup (\mathbf{5};\ \infty)$
3. $S = (-\infty;\ -\mathbf{2}) \cup (\mathbf{2};\ \infty)$
4. $S = (-\infty,\ -\mathbf{2}) \cup (\mathbf{2},\ \infty)$

Ejemplo 2.51. Que pasa cuando tenemos que resolver desigualdades del tipo:

$$|x - 4| < 2$$

Esta desigualdad nos dice que la distancia entre x y 4 no debe de ser mayor que 2; y para poder determinar los valores de x que hacen verdadera esa desigualdad usamos la propiedad i., sustituyendo x por $(x - 4)$; entonces nos queda:

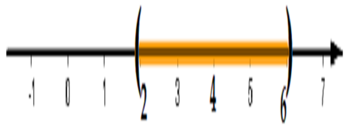
$$|x - 4| < 2 \text{ si y solo sí } -2 < x - 4 < 2$$

Resolviendo ésta última desigualdad obtenemos:

$$2 < x < 6$$

es decir, los valores de x cuya distancia a 4 es menor que 2; son los números que están entre 2 y 6, luego la solución expresada en intervalos es

$$S = (2;\ 6)$$



Ejemplo 2.52. Se tiene ahora la desigualdad:

$$|x - 5| \geq 1$$

Esta desigualdad nos dice que la distancia de x a 5 debe de ser mayor o igual que 1; entonces para determinar los valores de x que hacen verdadera la desigualdad aplicamos la propiedad ii., sustituyendo x por $(x - 5)$:

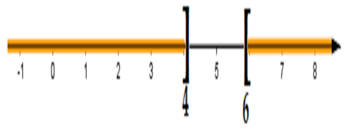
$$|x - 5| \geq 1 \text{ si y solo si } x - 5 \geq 1 \text{ o } x - 5 \leq -1$$

Resolviendo ambas desigualdades obtenemos como solución:

$$x \geq 6 \quad \text{o} \quad x \leq 4$$

es decir, los valores de x cuya distancia a 5 es mayor o igual que 1 son aquellos valores mayores a 6 o bien los x menores o iguales a 4. En notación de intervalos es:

$$(-\infty;\ 4] \cup [6;\ +\infty)$$



Los ejemplos anteriores muestran como resolver inecuaciones o desigualdades con valor absoluto, aplicando las propiedades i. y ii.. Veamos ahora un ejemplo en donde aparece en ambos lados de la desigualdad el módulo. La idea es aplicar algunas de las propiedades antes mencionadas para luego resolver una inecuación aplicando regla de los signos.

Ejemplo 2.53. Vamos a resolver la siguiente desigualdad:

$$|x-1| < |2x+1|$$

Primero vamos analizar si la desigualdad se verifica cuando $|2x+1| = 0$, es decir para $x = -\frac{1}{2}$, pues de ser así $-\frac{1}{2}$ es solución de la desigualdad y se tendrá que considerar a este valor a la hora de escribir la solución final. En el caso de que no sea solución no vamos a tener problema a la hora de dividir a $|x-1|$ por $|2x+1|$ para poder resolver la desigualdad dada. Como en este caso $|x-1| < 0$ no se verifica para $x = -\frac{1}{2}$ este valor no es solución y comenzamos a resolver la desigualdad sin problema multiplicando en ambos lados de la misma por el inverso multiplicativo de $|2x+1|$. Nos queda entonces por resolver

$$\frac{|x-1|}{|2x+1|} = \left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 1$$

a la cual la resolveremos aplicando la propiedad i., en donde en nuestro caso $b = 1$

Nos queda entonces:

$$-1 < \frac{x-1}{2x+1} < 1$$

Luego debemos resolver:

$$\underbrace{-1 < \frac{x-1}{2x+1}}_{1.} \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\frac{x-1}{2x+1} < 1}_{2.}$$

Resolvemos 1., para ello, sumamos 1 en ambos lados de la desigualdad, para que nos quede una desigualdad que resolveremos aplicando la regla de los signos:

$$\frac{x-1}{2x+1} + 1 > 0 \qquad \text{resolviendo} \qquad \frac{3x}{2x+1} > 0$$

luego al aplicar la regla de los signos nos queda por resolver

i) $3x > 0$ y $2x + 1 > 0$

ii) $3x < 0$ y $2x + 1 < 0$

cuya solución de 1. es la unión de la solución de i) y ii):

$$S_{1.} = \left(-\infty;\ \frac{-1}{2}\right) \cup (0;\ \infty)$$

Resolvemos 2., para ello, sumamos -1 en ambos lados de la desigualdad, para que nos quede una desigualdad que resolveremos aplicando la regla de los signos:

$$\frac{x-1}{2x+1} - 1 < 0 \qquad \text{resolviendo} \qquad \frac{-x-2}{2x+1} < 0$$

luego al aplicar la regla de los signos nos queda por resolver

i) $-x-2>0$ y $2x+1<0$

ii) $-x-2<0$ y $2x+1>0$

cuya solución de 2. es la unión de la solución de i) y ii):

$$S_{2.} = (-\infty;\ -2) \cup \left(\frac{-1}{2};\ \infty\right)$$

Finalmente la intersección de la solución 1 ($S_{1.}$) con la solución 2 ($S_{2.}$) nos da la solución de la desigualdad dada:

$$S = S_{1.} \cap S_{2.} = (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$$

Es decir los valores de x que verifican $|x-1| < |2x+1|$ son aquellos que pertenecen al intervalo $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$.

Ejercicio 2.54. Resolver las siguientes desigualdades con módulo:

1. $|7-2x| \geq x-3$
2. $|x-5| \leq x-1$
3. $|x-1| - |x+1| < 0$

Solución:

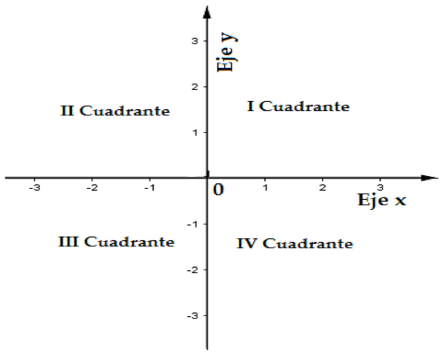
1. $S = (-\infty;\ \frac{10}{3}] \cup [\mathbf{4};\ \infty)$ 2. $S = [\mathbf{3};\ \infty)$ 3. $S = (\mathbf{0};\ \infty)$

Capítulo 3

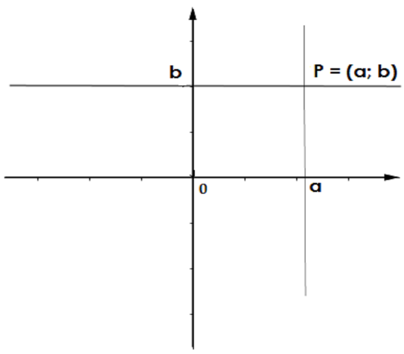
Funciones

3.1. Sistema de coordenadas rectangulares.

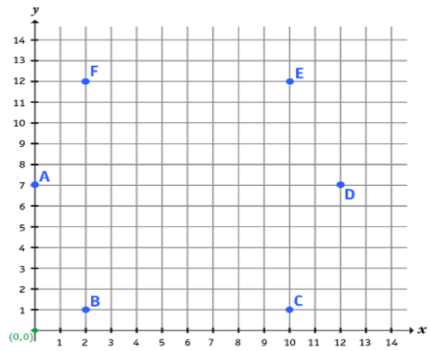
En el plano, se grafican dos copias de la recta real, una horizontal y la otra vertical, de modo que se intersectan en los puntos ceros de las dos rectas. A las rectas se las denomina **Ejes Coordenados** y a su intersección que se la denota con 0, se la denomina **Origen.** Por convención, la recta horizontal se llama **Eje** x y a la recta vertical se la llama **Eje** y. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas **Cuadrantes.**



Un punto P en el plano, se designa por medio de una pareja de números, llamados cada uno **Coordenadas Cartesianas**. Si una línea vertical y otra horizontal que pasan por P, intersectan a los ejes x e y en a y b, respectivamente, entonces P tiene coordenadas $(a;\ b)$; luego $(a;\ b)$ es un par ordenado de números, en donde el primer número a, es la coordenada x o **Abscisa**; y el segundo número, b, es la coordenada y u **Ordenada.**



Ejercicio 3.1. Escribir los pares ordenados de cada uno de los puntos ubicados en el siguiente sistema de ejes cartesianos.



Ejercicio 3.2. Representar los siguientes puntos en un sistema de ejes coordenados:

1. $\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$
2. $(0,\ -1)$
3. $(\sqrt{2},\ 4)$
4. $\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$
5. $\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{3}\right)$
6. $(3,\ 6)$
7. $(-8,\ -6)$
8. $(-5,\ 0)$
9. $\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$

3.2. Gráfica de Ecuaciones.

El uso de coordenadas para puntos en el plano nos permite describir curvas por medio de una ecuación. La **Gráfica de una Ecuación** en x e y consiste en aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas $(x;\ y)$ hacen verdadera la igualdad. En el dictado del curso nos va a interesar graficar ecuaciones de primer y segundo grado.

Observación 3.3. El procedimiento que se menciona a continuación sólo es válido cuando el conjunto de valores que pueden tomar x e y son los reales.

3.2.1. Procedimientos para graficar una ecuación:

1. Obtener las coordenadas de alguno de los puntos que satisfacen la ecuación.
2. Graficar estos puntos en el plano.
3. Conectar los puntos con una curva suave.

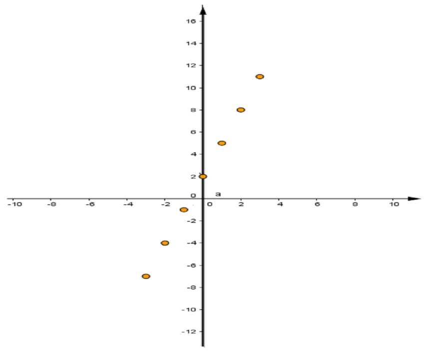
Ejemplo 3.4. Grafiquemos la ecuación:

$$y = 3x + 2$$

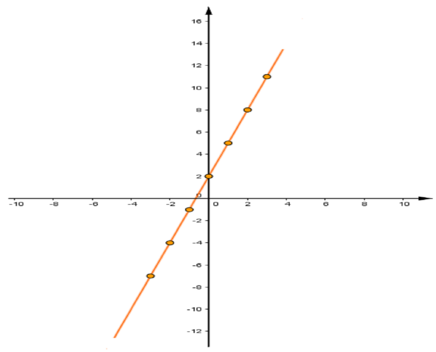
1. El primer paso que vamos a realizar es construir una tabla de valores para determinar las coordenadas de alguno de los puntos que satisfacen la ecuación.

x	$y = 3x + 2$	$P = (x;\ y)$
-3	$y = 3(-3) + 2 = -7$	$(-3;\ -7)$
-2	$y = 3(-2) + 2 = -4$	$(-2;\ -4)$
-1	$y = 3(-1) + 2 = -1$	$(-1;\ -1)$
0	$y = 3(0) + 2 = 2$	$(0;\ 2)$
1	$y = 3(1) + 2 = 5$	$(1;\ 5)$
2	$y = 3(2) + 2 = 8$	$(2;\ 8)$
3	$y = 3(3) + 2 = 11$	$(3;\ 11)$

2. Graficamos los puntos obtenidos de la tabla, en el plano:



3. Unimos los puntos con una curva suave:



Observación 3.5. Cuántos mas puntos se grafiquen, mejor va a poder ser la realización de la gráfica, pues la idea es guiarse uniendo estos puntos para su construcción.

Ejemplo 3.6. Graficar la ecuación:

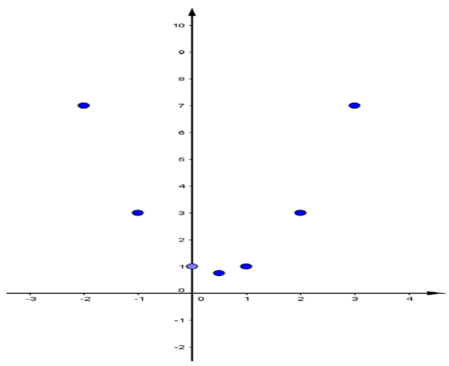
$$y = x^2 - x + 1$$

1. El primer paso que vamos a realizar es construir una tabla de valores para

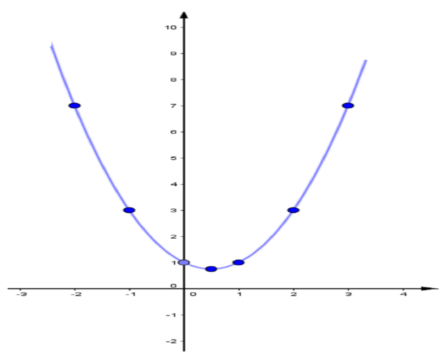
determinar las coordenadas de alguno de los puntos que satisfacen la ecuación.

x	$y = x^2 - x + 1$	$P = (x,\ y)$
-2	$y = (-2)^2 - (-2) + 1 = 7$	$(-2;\ 7)$
-1	$y = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$	$(-1;\ 3)$
0	$y = (0)^2 - (0) + 1 = 1$	$(0;\ 1)$
$\frac{1}{2}$	$y = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2}) + 1 = \frac{3}{4}$	$(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4})$
1	$y = (1)^2 - (1) + 1 = 1$	$(1;\ 1)$
2	$y = (2)^2 - (2) + 1 = 3$	$(2;\ 3)$
3	$y = (3)^2 - (3) + 1 = 7$	$(3;\ 7)$

2. Graficamos los puntos obtenidos de la tabla, en el plano:



3. Unimos los puntos con una curva suave:



Observación 3.7. Al observar de los ejemplos, la tabla de valores realizada para graficar a la ecuación, como así también la representación gráfica de las mismas; se ve que en ambas se expresa una relación entre dos magnitudes, x e y. La relación entre estas variables es la siguiente: **a cada valor de la variable x, le corresponde uno y solo un valor de la variable** y. De aquí que a y se la denomina **variable dependiente** y a x **variable independiente** . Esta relación define el concepto de función.

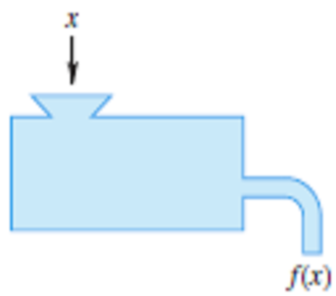
Observación 3.8. A la expresión general de la ecuación de una función se la denota $y = f(x)$.

3.3. Funciones.

Antes de empezar a hablar del concepto de Función, entendamos que se entiende por relación. A las relaciones las encontramos por todos lados, por ejemplo la relación entre horas que pasa un estudiante con el celular y sus notas en el colegio, pues si están muchas horas frente al celular, sus notas bajarán. Otra relación que podemos ver es entre las preguntas contestadas en un examen y la nota obtenida, pues a más respuestas correctas, mayor será la nota. También otra relación que podemos encontrar a diario, es cuando vamos a hacer las compras y lo que vamos a pagar por ello, por ejemplo si compramos tres gaseosas, cuyo valor de cada una de ellas es de \$60, vamos a pagar \$180; la relación estaría entre la cantidad de gaseosas y el valor a pagar por ellas; y así podemos encontrar infinidad de ejemplos y de aquí la gran importancia de este tema.

Definición 3.9. Dados dos conjuntos A y B, una función de A en B es una regla de correspondencia o relación entre ambos conjuntos, que asocia a cada elemento x del conjunto A uno y solo un elemento del conjunto B. El conjunto A se llama **conjunto de partida o dominio** de f, el conjunto B se denomina **conjunto de llegada o codominio** de f.

Para entender mejor el tema, pensemos en una función como una máquina que toma como entradas un valor x y produce una salida $f(x)$. Cada valor de entrada se hace corresponder con **un solo** valor de salida. No obstante, puede suceder que diferentes valores de entrada den el mismo valor de salida.



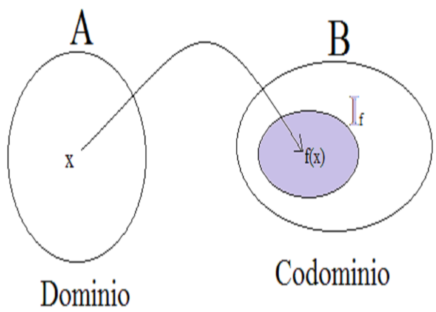
La definición no pone restricción sobre los conjuntos del dominio y del codominio. Por ejemplo el dominio podría consistir en el conjunto de personas en un curso de Análisis, el codominio el conjunto de las calificaciones que se obtendrán y la regla de correspondencia la asignación de calificaciones; o como vimos en uno de los ejemplos anteriores de relaciones, el dominio puede ser las horas que el estudiante pasa frente al celular, el codominio el conjunto de calificaciones y la regla de correspondencia la asignación de calificaciones. De acuerdo a la definición anterior, para cada elemento x del dominio de A la función f le hace corresponder un único elemento en el codominio de B; a este elemento lo denotamos $f(x)$. Al conjunto de todos los valores $f(x)$ pertenecientes a B, con x perteneciente al dominio A de la función se lo denomina conjunto imagen, rango o recorrido de f y lo denotaremos I_f. En símbolos,

$$I_f = \{y \in B \ / \ \exists \ x \in A \ / \ f(x) = y\}$$

Notación 3.10. Usaremos la siguiente notación para denotar "f es función de A en B".

$$f : A \to B$$

Siendo A el dominio y B el codominio.



Observación 3.11. Una función puede expresarse mediante un texto, una expresión algebraica, una tabla de valores o bien por medio de un gráfico. A lo largo del curso,

nos va a interesar graficar funciones lineales y cuadráticas.

Ejercicio 3.12. Considere la función $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ que a cada entero le asigna su opuesto:

1. *Escribir simbólicamente* $f(z)$
2. *Calcular* $f(-3),\ f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f(1)$ *y* $f(2)$.
3. *Representar los valores obtenidos en un sistema de ejes cartesianos.*

Ejercicio 3.13.
1. Encontrar la expresión de alguna función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que cumpla:

$$f(-2) = -8,\ f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1 \text{ y } f(2) = 8$$

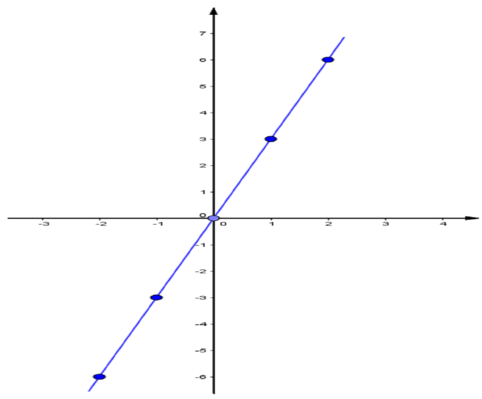
2. Representar los valores obtenidos en un sistema de ejes cartesianos.

3.4. Función Lineal

Definición 3.14. Una **función lineal,** es una función que se puede expresar como una ecuación que tiene la siguiente forma: $f(x) = mx+b$ donde m y b son constantes reales y x es una variable real. Su nombre, función lineal, se debe a que gráficamente en el plano representa a una línea recta. Notaremos a estas funciones de la forma $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, lo cual indica que el dominio y la imagen de la misma es el conjunto de los números reales.

Ejemplo 3.15. Representemos gráficamente a la ecuación lineal $y = 3x$. Primero realizamos una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

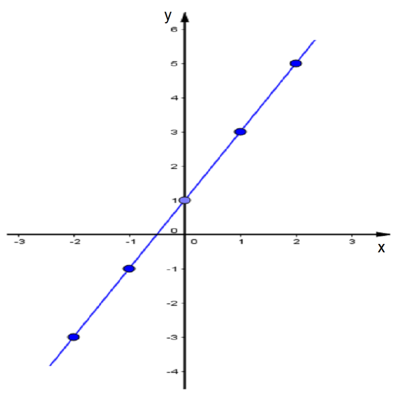
x	$f(x) = 3x$
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6



Observación 3.16. Al observar el gráfico se puede concluir que la recta pasa por el origen y a medida que x se mueve un lugar a la derecha, y se mueve tres lugares hacia arriba.

Ejemplo 3.17. Representemos gráficamente a la función lineal $y = 2x + 1$. Nuevamente, realizamos primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

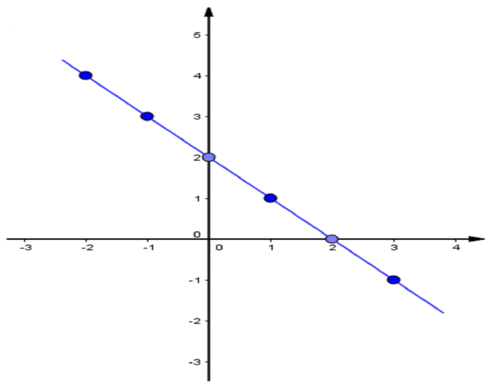
x	$y = 2x + 1$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5



Observación 3.18. Al observar la gráfica concluimos que la recta corta al eje y en 1, y luego desde ahí cuando corre un lugar a la derecha en x, sube dos lugares, es decir se mueve dos lugares hacia arriba en y.

Ejemplo 3.19. Representemos gráficamente a la función lineal $y = -x + 2$. Nuevamente, realizamos primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

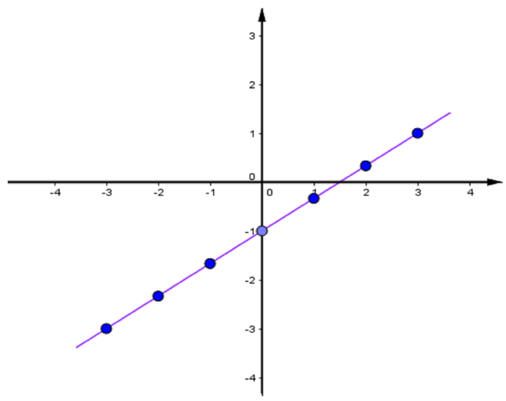
x	$f(x) = -x + 2$
-2	4
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	-1



Observación 3.20. Observando el gráfico concluimos que la recta intersecta al eje y en 2, y que por cada un lugar que se mueve con respecto al eje x, baja un lugar con respecto al eje y.

Ejemplo 3.21. Representemos gráficamente a la función lineal $y = \frac{2}{3}x - 1$ Nuevamente, se realiza primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego se ubican los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

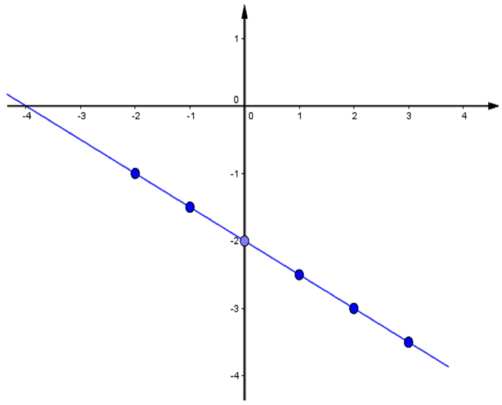
x	$f(x) = \frac{2}{3}x - 1$
-3	-3
-2	$-\frac{7}{3}$
-1	$-\frac{5}{3}$
0	-1
1	$-\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	1



Observación 3.22. Al observar la gráfica concluimos que la recta intersecta al eje y en -1, y que por cada tres lugares que se mueve con respecto al eje x, sube dos lugares con respecto al eje y.

Ejemplo 3.23. Representemos gráficamente a la función lineal $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$. Nuevamente, realizamos primero una tabla de valores que verifican la ecuación y luego ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos para luego unirlos y determinar así la gráfica de esta función.

x	$f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$
-2	-1
-1	$-\frac{3}{2}$
0	-2
1	$-\frac{5}{2}$
2	-3
3	$-\frac{7}{2}$



Observación 3.24. Al observar la gráfica concluimos que ésta intersecta al eje y en -2, y que cuando se mueve dos lugares con respecto al eje x, se mueve uno hacia abajo con respecto al eje y.

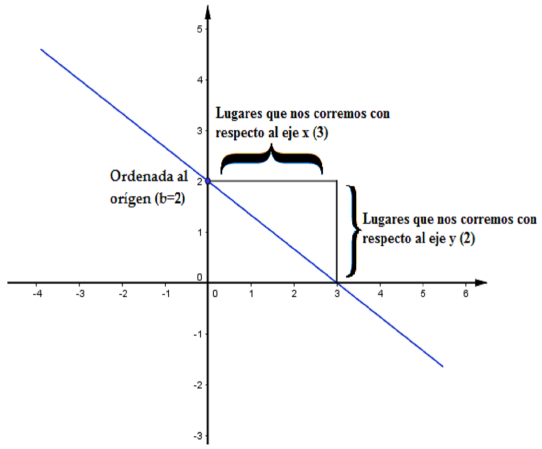
Al observar las gráficas de las distintas rectas y las observaciones obtenidas, concluimos que la recta corta al eje y en el término independiente que se corresponde al valor de b en la expreción general de la función lineal. A este valor se lo denomina **Ordenada al Origen.** Luego a partir de este valor, la recta se mueve a la derecha en x tantos lugares como indica el valor del denominador del coeficiente que acompaña a x, y de ahí la recta va a subir tantos lugares como indica el numerador del coeficiente que acompaña a la x; ojo, subimos en el caso de que el signo del coeficiente de x es positivo, en el caso de que fuera negativo se debe bajar; indicando con esto último la inclinación o pendiente de la recta. Por tal motivo al valor que acompaña a x se lo denomina **Pendiente.** Generalizando, dada la función lineal $f(x) = mx + b$

tenemos que:

$$b = \text{Ordenada al origen, que indica el valor que intersecta al eje } y.$$

$$m = \text{Pendiente de la recta, que indica la inclinación de la misma.}$$

Ejemplo 3.25. Representemos gráficamente la recta $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 2$.



Observación 3.26. Cabe destacar que en el transcurso de esta sección se ha trabajado con rectas cuyas pendientes eran números racionales, en caso de tener una recta cuya pendiente resulte un número irracional se graficará a la misma siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

1. Encontrar dos puntos que verifiquen la ecuación de la recta.

2. Ubicar los dos puntos hallados en **1.** en un sistema de ejes coordenados.

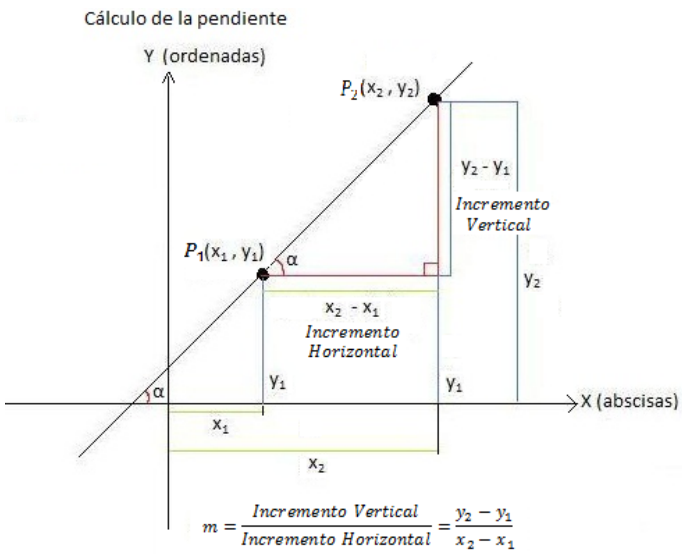
3. Unir los puntos con una recta.

Ejercicio 3.27. Representar gráficamente las siguientes rectas:

1. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 1$
2. $f(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$
3. $f(x) = -\dfrac{4}{3}x$
4. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
5. $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$
6. $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

3.4.1. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Como ya se ha mencionado la pendiente de una recta se interpreta como la razón del incremento vertical con respecto al incremento horizontal, entonces dados dos puntos por los que pasa la recta, podemos determinar su pendiente. Su interpretación gráfica es la siguiente:



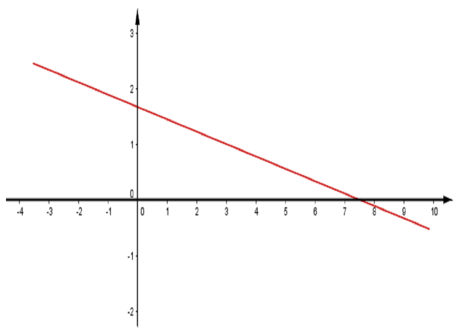
De esta manera dados dos puntos $(x_{1,}\ y_1)$ y $(x_2,\ y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ la ecuación de la recta que pasa por los mismos es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (1)$$

Ejemplo 3.28. Determinemos la recta que pasa por los puntos $P = \left(0;\ \frac{5}{3}\right)$ y $Q = (3;\ 1)$. Aplicando la ecuación (1) :

$$\begin{aligned} y - \frac{5}{3} &= \frac{1 - \frac{5}{3}}{3 - 0}(x - 0) \\ &\rightarrow \quad y - \frac{5}{3} = \frac{-\frac{2}{3}}{3}x \\ &\rightarrow \quad y = \frac{-2}{9}x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

La representación gráfica de la misma es:



Ejercicio 3.29. 1. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(1;\ 1)$ *y* $(0;\ -2)$.

2. *Hallar la ecución de la recta que pasa por los puntos* $(-2,\ 0)$ *y* $(1, -4)$.

Solución:

1. $y = 3x - 2$

2. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$

3.4.2. Ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente dada.

De la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, vimos que la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

entonces haciendo este reemplazo en la ecuación $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ se obtiene la ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente dada. Esta es:

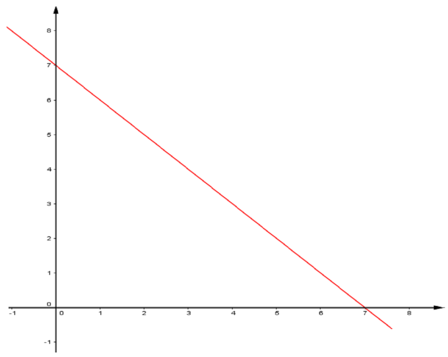
$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (2)$$

con m la pendiente dada y $(x_{1,}\ y_1)$ el punto por el que pasa la recta.

Ejemplo 3.30. Determinemos la ecuación de la recta de pendiente $m = -1$ que pasa por el punto (2; 5). Aplicando la fórmula (2) nos queda:

$$
\begin{aligned}
y-5 &= -1(x-2) \\
&\rightarrow \quad y=-x+2+5 \\
&\rightarrow \quad y=-x+7
\end{aligned}
$$

Representación gráfica:



Ejercicio 3.31. 1. Hallar la ecuación de la recta de pendiente $\left(-\frac{2}{5}\right)$ y que pasa por el punto (0; 2).

2. Hallar la ecuación de la recta de pendiente 3 y que pasa por el punto (1; -2).

Solución:

1. $y=-\frac{2}{5}x+2$

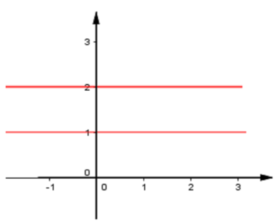
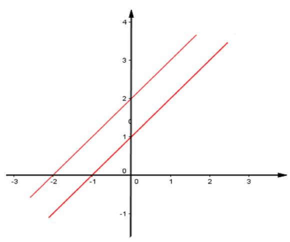
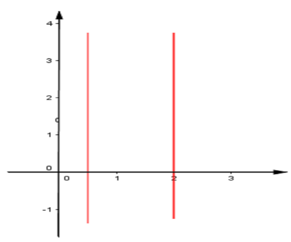
2. $y = 3x - 5$

3.4.3. Rectas paralelas y perpendiculares

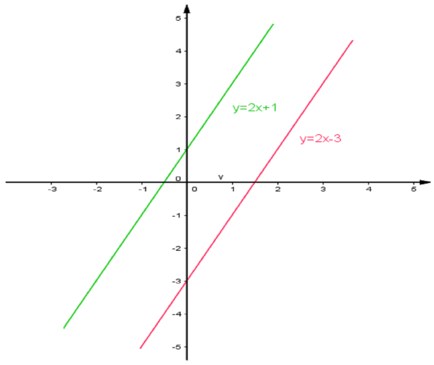
Cuando representamos gráficamente dos ecuaciones lineales en el mismo sistema de ejes cartesianos existen tres posibilidades de acuerdo a la disposición de las mismas en el plano:

1. Las ecuaciones tienen la misma gráfica, y se corresponden a rectas coincidentes.
2. Las gráficas se intersectan en un punto, y se corresponden a rectas incidentes.
3. Las gráficas corresponden a rectas pararlelas.

Dos rectas son **paralelas** cuando sin ser coincidentes, gráficamente no se cortan en ningún punto del plano y para que ello ocurra deben de tener la misma pendiente.

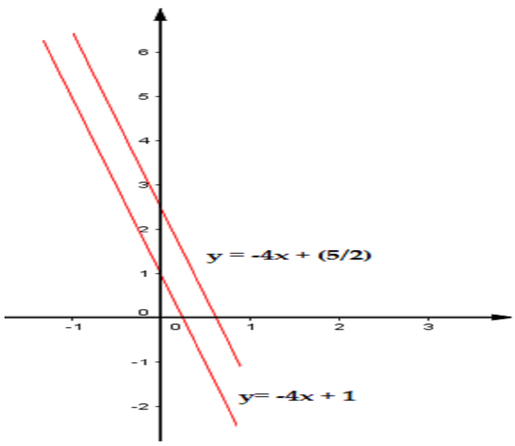
Ejemplo 3.32. La recta $y = 2x - 3$ es paralela a la recta $y = 2x + 1$ pues tienen la misma pendiente, 2. La representación gráfica de ambas rectas es:



Ejemplo 3.33. Determinemos la fórmula de la función lineal que es paralela a la función $y = -4x + 1$ y que pasa por los puntos $\left(0;\ \frac{5}{2}\right)$. Luego representemos ambas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos. Como la recta a determinar es paralela a la recta $y = -4x + 1$ su pendiente es -4; luego aplicando la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por un punto con pendiente dada nos queda

$$\begin{aligned} y - \frac{5}{2} &= -4(x - 0) \\ &\rightarrow \quad y = -4x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

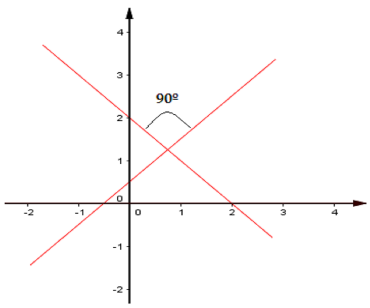
Representación gráfica:

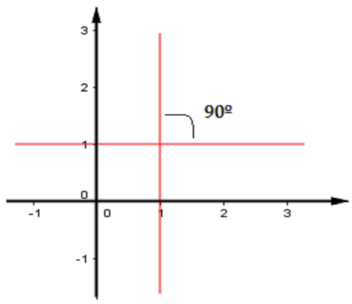


Dos rectas son **perpendiculares** cuando gráficamente forman un ángulo recto (ángulo de 90°). Esta situación se presenta en los siguientes caso:

1. Si l_1 y l_2 son rectas oblicuas cuyas respectivas pendientes m_1 y m_2 cumplen con que $m_1.m_2 = -1$.

2. Si una recta es horizontal y la otra es vertical.





Ejemplo 3.34. Determinemos si la recta l_1 que pasa por los puntos $(-1;\ 5)$ y $(3;\ 9)$ es perpendicular a la recta l_2 que pasa por los puntos $(-2;\ 6)$ y $(3;\ 1)$. Para determinar si ambas rectas son perpendiculares, debemos determinar cuál es la pendiente de cada una de ellas: Pendiente de la recta l_1 :

$$m_1 = \frac{9-5}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

Pendiente de la recta l_2 :

$$m_2 = \frac{1-6}{3-(-2)} = \frac{-5}{5} = -1$$

Luego

$$m_1.m_2 = 1.(-1) = -1$$

como el producto de ambas pendientes es (-1) concluimos que las rectas son per-perpendiculares.

Observación 3.35. El producto $m_1.m_2 = -1$, es equivalente a $m_1 = \dfrac{-1}{m_2}$ o $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$; entonces podemos concluir que dos rectas oblicuas son perpendiculares cuando la pendiente de una de ellas es la inversa y opuesta de la otra.

Ejemplo 3.36. Si la pendiente de una de las rectas es $m_1 = -\dfrac{3}{4}$, la pendiente de una recta perpendicular a ella es $m_2 = \dfrac{4}{3}$.

Ejercicio 3.37.

1. Encontrar la ecuación de la recta que corta al eje x en 3 y es paralela a la recta $3x - 4y = 4$.

2. Determinar la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $3y - 6x = 5$ y pasa por el punto $(3;\ -4)$.

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3;\ 0)$ y es perpendicular a la recta $3x - 4y = 4$.

Solución:

1. $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{9}{4}$

2. $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$

3. $y = -\frac{4}{3}x + 4$

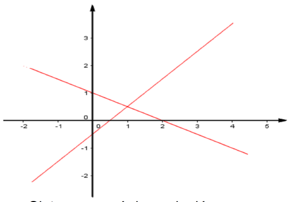
3.5. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Definición 3.38. Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y, es un conjunto de dos ecuaciones que puede escribirse en la forma siguiente:

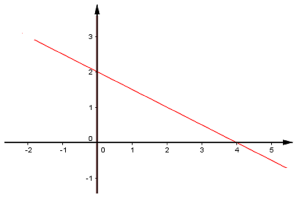
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son constantes reales con $a_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ o bien $a_2 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$. Estas restricciones aseguran que ambas variables figuren en el sistema y que haya por lo menos una variable en cada ecuación.

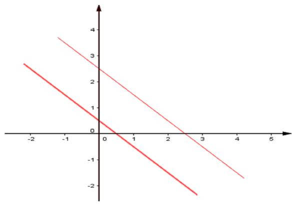
Los números a_1, a_2, b_1, y b_2 se llaman **Coeficientes** del sistema y los números c_1 y c_2 son los **Términos Independientes.** **El Conjunto Solución** del sistema es el conjunto de pares ordenados $(x;\ y)$ que verifican ambas ecuaciones. Como las ecuaciones que componen el sistema son lineales, la gráfica de cada una de ellas es una recta. De esta manera de acuerdo a la posición relativa de dos rectas, se da la clasificación de cada sistema.



Sistema con única solución



Sistema con infinitas soluciones

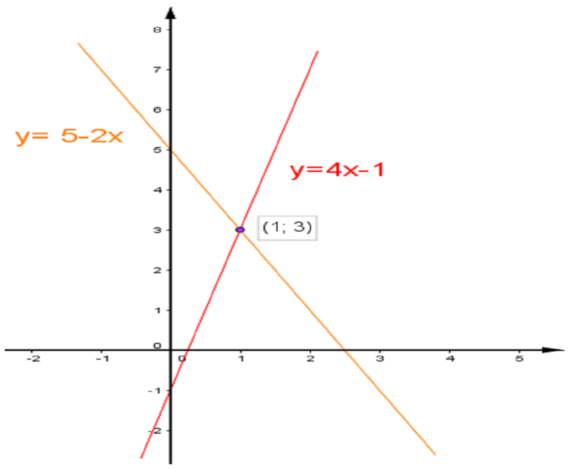


Sistema sin solución

Ejemplo 3.39. Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

Representando ambas ecuaciones lineales en el mismo sistema de ejes cartesianos:



concluimos que como se intersectan en un punto, el sistema tiene una única solución; y es:

$$S = \{(1;\ 3)\}$$

Este método gráfico de resolver un sistema de ecuaciones, no siempre es el mas conveniente, es por eso que existen otros métodos que nos permiten resolver a cualquier sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

3.5.1. Métodos de resolución de sistema de ecuaciones:

* **Método de Sustitución:** Este método consiste en despejar una de las variables de cualquiera de las ecuaciones, para luego sustituirla en la otra ecuación; obteniéndose un sistema equivalente donde una de las ecuaciones depende de una variable.

Ejemplo 3.40. Consideramos el sistema del ejemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (i.) \\ 4x - y = 1 & (ii.) \end{cases}$$

Para resolverlo por este método, lo primero que debemos hacer, es despejar una de las variables de una de las ecuaciones; supongamos que despejamos y de la ecuación $(i.)$

$$2x + y = 5 \ \rightarrow \ y = 5 - 2x \qquad (iii.)$$

luego sustituimos este valor de y en la ecuación $(ii.)$

$$4x - (5 - 2x) = 1$$

Nos queda entonces una ecuación de una variable, x; resolvámosla para poder determinar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 4x - (5 - 2x) &= 1 \rightarrow 4x - 5 + 2x = 1 \\ &\rightarrow 6x = 1 + 5 \rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

entonces reemplazando por este valor en ($iii.$)

$$y = 5 - 2(1) \rightarrow y = 3$$

Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones es:

$$S = \{(1;\ 3)\}$$

solución que coincide con la obtenida por el método de resolución gráfico.

* **Método de Igualación:** Para resolver un sistema por este método, primero se despeja de las dos ecuaciones la misma variable para luego igualar las expresiones obtenidas, resultando así una ecuación con una incógnita.

Ejemplo 3.41. Consideramos nuevamente el sistema de los ejemplos anteriores:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (i.) \\ 4x - y = 1 & (ii.) \end{cases}$$

Para resolverlo por este método, lo primero que debemos de hacer, es despejar la misma variable de las dos ecuaciones; supongamos que despejamos y:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \rightarrow y = 5 - 2x \qquad (iii.) \\ 4x - y &= 1 \rightarrow y = -1 + 4x \qquad (iv.) \end{aligned}$$

luego igualo ambas ecuaciones:

$$5 - 2x = -1 + 4x$$

Nos queda entonces una ecuación de una variable, x; resolvámosla para poder determinar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 5 - 2x &= -1 + 4x \;\rightarrow\; -2x - 4x = -1 - 5 \\ &\rightarrow\; -6x = -1 - 5 \;\rightarrow\; x = 1 \end{aligned}$$

entonces reemplazando por este valor en $(iii.)$ o en $(iv.)$ se determina el valor de y :

$$y = -1 + 4(1) \;\rightarrow\; y = 3$$

Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones es:

$$S = \{(1;\ 3)\}$$

Que vuelve a coincidir con la solución obtenida con los métodos anteriores.

* **Método de Reducción por Sumas y Restas:** Este método consiste en reducir el sistema de ecuaciones a una sola ecuación con una sola variable por medio de los siguientes pasos:

  a) Preparamos las dos ecuaciones, para lo cual podemos multiplicar por los números que convengan, de modo que las incógnitas que pretendamos eliminar tengan coeficientes opuestos.

b) Al sumar dichas ecuaciones se eliminará dicha incógnita, obteniendo una ecuación en una variable.

c) Resolvemos dicha ecuación.

d) Una vez obtenido el valor de dicha incógnita, bastará con sustituirlo en cualquiera de las ecuaciones iniciales y despejar la otra incógnita.

Ejemplo 3.42. Nuevamente tomando el sistema de ecuaciones de los ejemplos anteriores, veamos la aplicación de este método para resolverlo:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (i.) \\ 4x - y = 1 & (ii.) \end{cases}$$

Se toma $(i.)$ y se lo multiplica por (-2) miembro a miembro:

$$-4x - 2y = -10$$

luego se suma esta ecuación a la ecución $(ii.)$

$$\begin{array}{rr} & -4x - 2y = -10 \\ + & 4x - y = 1 \\ \hline & 0x - 3y = -9 \end{array}$$

entonces $-3y = -9$, es decir obtuvimos una ecuación con una incógnita, cuya solución es $y = 3$. Luego reemplazando este valor de y en $i)$ nos queda otra ecuación en una incógnita, en este caso x: $2x + 3 = 5$, luego $x = 1$. Entonces la solución del sistema de ecuaciones es:

$$S = \{(1;\ 3)\}$$

Ejemplo 3.43. Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 & (i.) \\ x + 2y = 1 & (ii.) \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción por sumas y resta: Multiplicamos la ecuación $(ii.)$ por (-2) :

$$-2x - 4y = -2$$

luego sumamos ésta ecuación a $(i.)$

$$\begin{array}{c} 2x + 4y = 2 \\ \underline{-2x - 4y = -2} \\ 0x + 0y = 0 \end{array}$$

como obtuvimos como resultado $0 = 0$ nos indica que el sistema tiene infinitas soluciones. A la solución se la puede expresar de las siguientes maneras:

$$S = \{(x;\ y) :\ x = 1 - 2y \ \forall y \in \mathbf{R}\}$$

o bien

$$S = \left\{(x;\ y) :\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ \forall x \in \mathbf{R}\right\}$$

Ejemplo 3.44. Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 8y = 16 \end{cases}$$

Aplicando el métododo de igualación, despejamos de ambas ecuaciones la variable x :

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 2 \rightarrow x = 1 - 2y \\ 4x + 8y &= 16 \rightarrow x = 4 - 2y \end{aligned}$$

Igualando las ecuaciones que obtuvimos para luego resolver la ecuación que nos queda:

$$\begin{aligned} 1 - 2y &= 4 - 2y \rightarrow -2y + 2y = 4 - 1 \\ &\rightarrow 0 = 3 \quad \text{Absurdo!!!!} \end{aligned}$$

este absurdo nos indica que el sistema no tiene solución.

Situaciones problemáticas

En muchas situaciones problemáticas se requiere del planteo de un sistema de ecuaciones para su resolución.

Ejemplo 3.45.

En una alcancía hay 50 monedas y un total de \$400. Si solo hay monedas de \$5 y de \$10, ¿Cuántas monedas de \$5 y de \$10 hay en la alcancía?

Resolución: Como el problema nos pregunta cuántas monedas de cada valor hay en *la alcancía, las incógnitas van a representar a la cantidad de monedas, es decir, por ejemplo podemos suponer que la variable x representa la cantidad de monedas de* \$5 *y la variable y representa a la cantidad de monedas de* \$10*. Luego con los datos del problema armamos las ecuaciones del sistema:*

$$\begin{cases} x + y = 50 & (i.) \\ 5x + 10y = 400 & (ii.) \end{cases}$$

Una vez planteado el sistema de ecuaciones debemos resolverlo por alguno de los métodos de resolución mencionados arriba. Aplicamos el método de sustitución: Despejamos de $(i.)$ la variable y :

$$y = 50 - x$$

luego sustituimos este valor en $(ii.)$ y resolvemos la ecuación que nos queda:

$$\begin{aligned} 5x + 10(50 - x) &= 400 \\ 5x + 500 - 10x &= 400 \\ &\to \quad -5x = 400 - 500 \\ &\to \quad x = 20 \end{aligned}$$

entonces el valor de $y = 50 - 20 = 30$.

Respuesta: *Hay* 20 *monedas de* \$5 *y* 30 *monedas de* \$10 *en la alcancía.*

Ejemplo 3.46.

En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas de estos animales son 50,y si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Resolución: Como el problema nos pregunta cuántos animales de cada clase hay, las incógnitas van a representar a la cantidad de animales, es decir, por ejemplo podemos suponer que la variable x representa la cantidad de conejos y la variable y representa a la cantidad de gallinas. Luego con los datos del problema armamos las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 50 & (i.) \\ 4x + 2y = 134 & (ii.) \end{cases}$$

Una vez planteado el sistema de ecuaciones debemos resolverlo por alguno de los métodos de resolución . Aplicamos el método de igualación Despejamos de $(i.)$ *y de* $(ii.)$ *la variable* y :

$$\begin{aligned} y &= 50 - x \\ y &= \frac{134 - 4x}{2} = 67 - 2x \end{aligned}$$

igualando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} 50 - x &= 67 - 2x \\ -x + 2x &= 67 - 50 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

luego el valor de y *es* $y = 50 - 17 = 33$

Respuesta: *Hay* 17 *conejos y* 33 *gallinas.*

Ejercicio 3.47. Resolver los siguientes problemas:

1. **En un almacén hay botellas de aceite de** 5 **litros y** 2 **litros. En total hay** 1000 **litros de acite y** 323 **botellas. ¿Cuántas botellas de cada tipo hay?**

   Solución: *Hay* 118 *botellas de* 5 *litros y* 205 *botellas de* 2 *litros.*

2. **Carlos le dice a Juan: "el dinero que yo tengo es el doble del que tu tienes". Y Juan le responde: "Si me das** 600 **pesos los dos tendremos la misma cantidad". ¿Cuánto dinero tiene cada uno?**

   Solución: *Carlos tiene* 2400 *pesos y Juan* 1200.

3. **Ana tiene el triple de la edad que su hijo Jaime. Dentro de** 15 **años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más**

que Jaime tiene su madre?

Solución: *La madre tiene* 30 *años más que su hijo Jaime.*

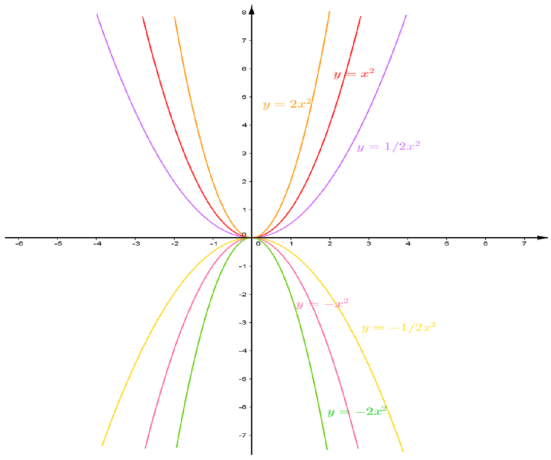
4. **La suma de dos números es** 10 **y la mitad de uno de ellos es el doble del otro. ¿Qué números son?**

   Solución: *Los números son* 2 *y* 8.

3.6. Función Cuadrática.

Definición 3.48. se llama función cuadrática a la función que se puede expresar como una ecuación que tiene la siguiente forma: $f(x) = ax^2+bx+c$. En este caso, a, b y c son los términos de la ecuación y pueden tomar cualquier valor real pero a siempre debe de ser diferente de 0. El término ax^2 es el término cuadrático, mientras que bx es el término lineal y c, el término independiente. Cuando están presentes todos los términos, se habla de una ecuación cuadrática completa. En cambio, si falta el término lineal o el término independiente, se trata de una ecuación cuadrática incompleta. El dominio de esta función es el conjunto de los números reales y la gráfica de la misma es una parábola.

3.6.1. Parábolas del tipo $y = ax^2,\ a \neq 0$.

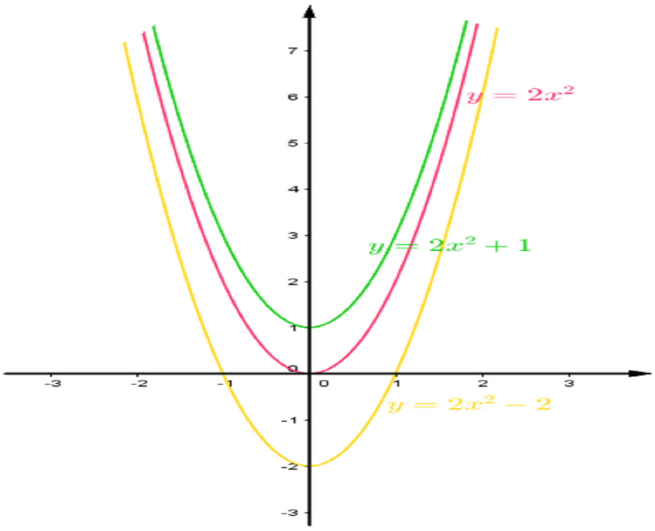


Al observar la gráfica concluimos: Respecto de la curva $y = x^2$, $y = ax^2$ verifica:

i. Cuando $|a| > 1$ la curva se acerca al eje y (eje de simetría). Cuando $|a| < 1$ se aleja del eje y.

ii. Cuando $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba. Cuando $a < 0$ las ramas de la parábola van hacia abajo.

3.6.2. Parábolas del tipo $y = ax^2 + c,\ \ a \neq 0\ y\ c \neq 0.$

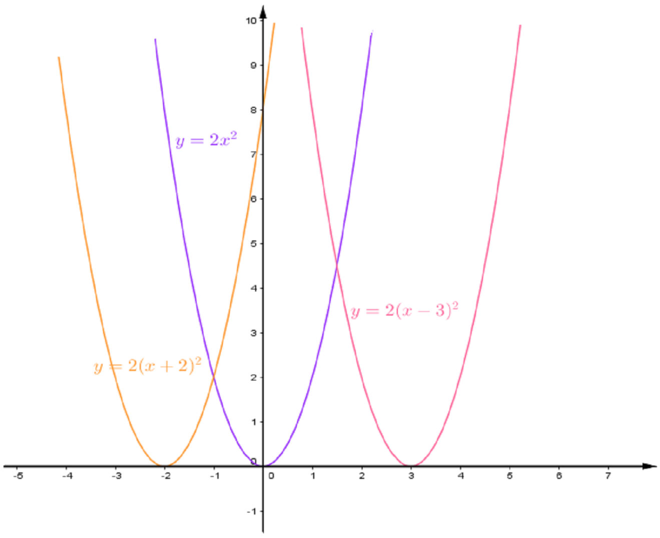


Al observar la gráfica concluimos: Respecto de $y = 2x^2$, la curva de ecuación $y = ax^2 + c$, con $a \neq 0$ es una parábola que:

i. Cuando $c > 0$ la curva está desplazada c unidades hacia arriba.

ii. Cuando $c < 0$ la curva está desplazada $|c|$ unidades hacia abajo.

3.6.3. Parábolas del tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ y $h \neq 0$.

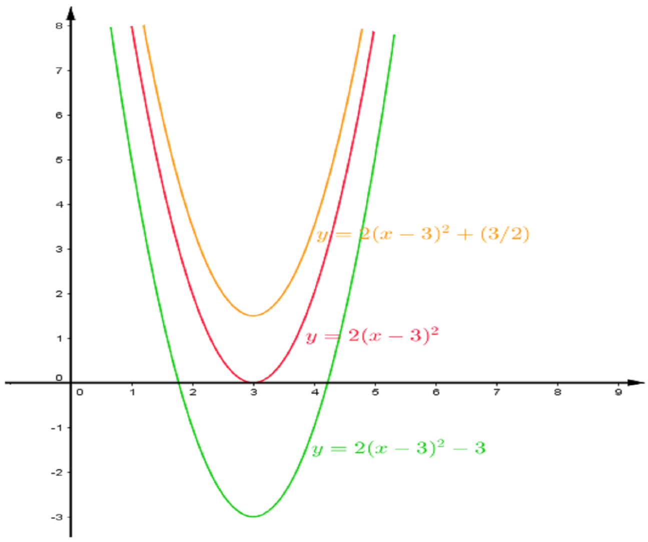


Al observar la gráfica concluimos: Respecto de la curva $y = 2x^2$, la curva de ecuación $y = a(x-h)^2$ con $a \neq 0$ es una parábola que:

i. Cuando $h > 0$, la curva está desplazada h unidades hacia la derecha.

ii. Cuando $h < 0$, la curva está desplazada $|h|$ unidades hacia la izquierda.

3.6.4. Parábolas del tipo $y = a(x-h)^2 + c$, $a \neq 0$, $h \neq 0$ y $c \neq 0$.



Al observar la gráfica concluimos: En esta última construcción unimos lo realizado para la parábola del tipo $y = a(x-h)^2$ con las del tipo $y = ax^2 + c$. De esta manera la parábola presenta traslación horizontal y vertical.

Observación 3.49. Cuando una función cuadrática está expresada en la forma $y = a(x-h)^2 + c$, se dice que está en su forma canónica, en donde el punto (h, c) representa al vértice de la parábola.

3.6.5. Parábolas del tipo $y = ax^2 + bx + c$, con a, b y c valores reales, distintos de cero.

Para graficar a este tipo de parábolas se requiere determinar previamente:

1. La o las intersecciones con el eje x, es decir, los ceros o raíces de la función.

2. La intersección con el eje y, que se corresponde con el valor del término independiente o bien se obtiene de reemplazar en la función a x por 0.

3. Vértice de la parábola: $v = (x_v;\ y_v)$ donde $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, con x_1 y x_2 las raíces de la función; o bien la coordenada x del vértice se puede obtener aplicando la fórmula $x_v = \dfrac{-b}{2a}$. La coordenada y del vértice se obtiene reemplazando por el valor obtenido de x_v en la función; o bien aplicando la fórmula, $y_v = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

4. Eje de simetría de la parábola, cuya ecuación que lo representa es $x = x_v$. Es importante ubicar este eje, pues es aquel que indica que las ramas de la parábola son simétricas con respecto a él.

Ejemplo 3.50. Sea $f(x) = x^2 - 2x - 3$; para representarla gráficamente buscamos:

1. Sus raíces o intersecciones con el eje x: como $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$ luego la función tiene dos raíces reales. Aplicando la fórmula resolvente o de

Bhaskara tenemos:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &= \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \\ &\rightarrow \quad x_1 = 3 \quad \text{y} \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

2. Intersección con el eje y :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3 \\ &\rightarrow \quad f(0) = -3 \end{aligned}$$

3. Vértice de la parábola: $V = (x_v;\ y_v)$

$$x_v = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

luego reemplazando por este valor en la función se obtiene el valor de y_v :

$$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

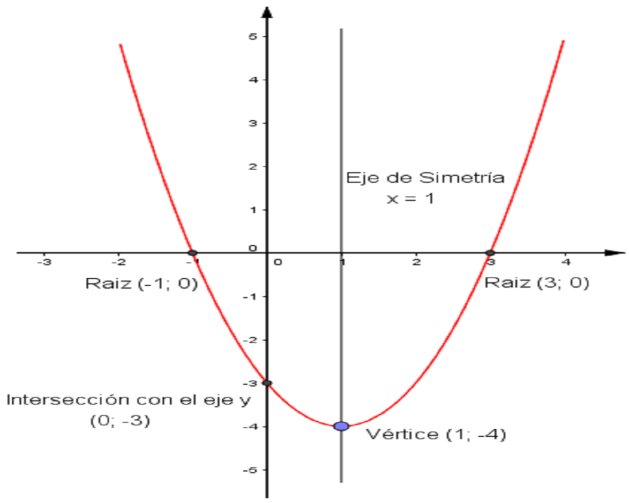
por lo tanto el vértice es:

$$v = (1;\ -4)$$

4. Eje de simetría:

$$x = 1$$

Ahora sí, marcando los resultados encontrados en un sistema de ejes y luego uniéndolos a estos puntos con una curva suave, obtenemos la gráfica de la función.



De la gráfica concluimos que en el intervalo $(-\infty;\ 1)$ la función es **decreciente**, pues cuando los valores de x aumentan, los valores de y disminuyen. Por otro lado observamos que en el intervalo $(1;\ \infty)$ la función es **creciente**, pues a medida que aumentan los valores de x también aumentan los valores de y. De esta manera tenemos que la función alcanza un **mínimo** en el vértice de la parábola. Por otro lado, al observar la gráfica concluimos que el conjunto imagen de la función es el intervalo $[-4, \infty)$

Ejemplo 3.51. Sea $f(x) = x^2 - 4x + 5$; para representarla gráficamente buscamos:

1. Sus raíces o intersecciones con el eje x: como $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0$ la función no tiene raíces reales, es decir las ramas de la parábola no cortan nunca al eje x .

2. Intersección con el eje y :

$$f(0) = 5$$

3. Vértice de la parábola: $V = (x_v;\ y_v)$ Como no tiene raices reales la función, la coordenada x del vértice no se puede obtener como el promedio de las raices; es por eso que aplicamos la fórmula dada con anterioridad:

$$x_v = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$$

luego la coordenada y del vértice es:

$$f\left(2\right) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$$

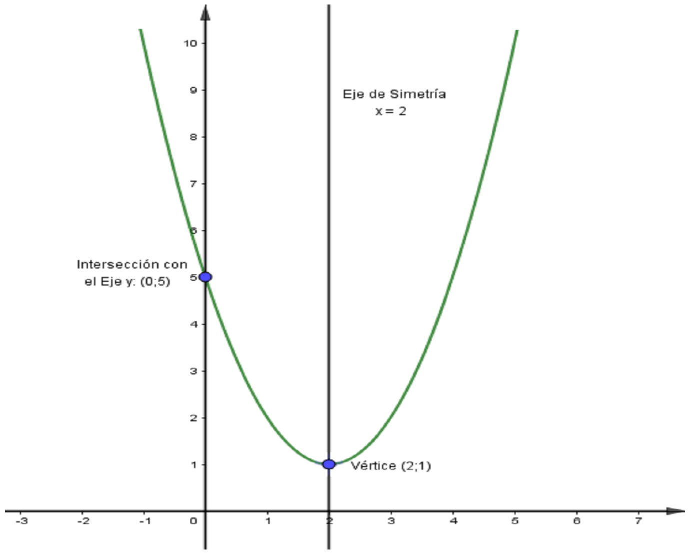
por lo tanto el vértice de la parábola es:

$$v = (2;\ 1)$$

4. Eje de simetría:

$$x = 2$$

Marcando los puntos recién encontrados en un sistema de ejes, y uniéndolos considerando también el eje de simetría, obtenemos la gráfica de la función:



De la gráfica concluimos que en el intervalo $(-\infty;\ 2)$ la función es **decreciente**, pues a medida que aumentan los valores de x disminuyen los valores de y. Por otro lado observamos que en el intervalo $(2;\ \infty)$ la función es **creciente**, pues cuando los valores de x aumentan, los valores de y también lo hacen. De esta manera tenemos que la función alcanza un **mínimo** en el vértice de la parábola. Por otro lado, al observar la gráfica concluimos que el conjunto imagen de la función es el intervalo $[1, \infty)$

Ejemplo 3.52. Sea $f(x) = x^2 + 2x + 1$; para representarla gráficamente buscamos:

1. Sus raíces o intersecciones con el eje x: Como $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ la función tiene una única raíz real y por lo tanto la gráfica de la función rebota sobre el

eje x. Busquemos esta raíz aplicando la fórmula resolvente o de Bhaskara:

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &= \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1 \\ &\rightarrow \quad x_1 = -1 \end{aligned}$$

2. Intersección con el eje y :

$$f(0) = 1$$

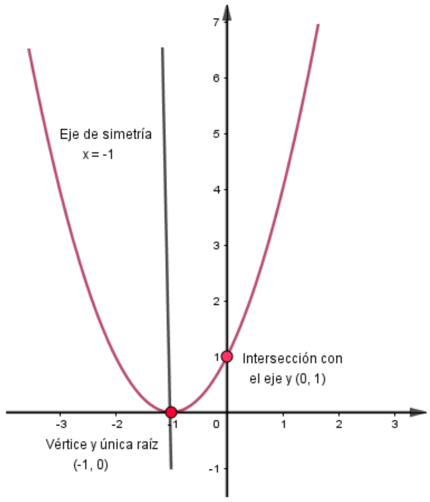
3. Vértice de la parábola: $V = (x_v;\ y_v)$ Como tiene una única raíz real la coordenada x del vértice coincide con la raíz, en este caso $x_v = -1$ y por lo tanto la coordenada y del vértice es 0, entonces el vértice de la parábola es el punto del plano:

$$v = (-1;\ 0)$$

4. Eje de simetría:

$$x = -1$$

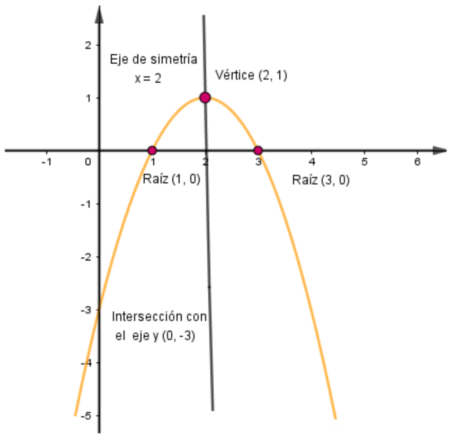
Marcando los puntos recién encontrados en un sistema de ejes, y uniéndolos considerando también el eje de simetría, obtenemos la gráfica de la función:



De la gráfica concluimos que en el intervalo $(-\infty;\ -1)$ la función es **decreciente**, pues a medida que aumentan los valores de x disminuyen los valores de y. Por otro lado observamos que en el intervalo $(-1;\ \infty)$ la función es **creciente**, pues cuando los valores de x aumentan, los valores de y también lo hacen. De esta manera tenemos que la función alcanza un **mínimo** en el vértice de la parábola. Por otro lado, al observar la gráfica concluimos que el conjunto imagen de la función es el intervalo $[0, \infty)$

Ejemplo 3.53. Sea $f(x) = -(x-1)(x-3)$ la función cuadrática expresada en **forma factorizada** y por lo tanto no es necesario aplicar algún método para determinar sus raíces, ya que las conocemos de antemano, estas son, 1 y 3. De la forma factorizada conocemos también el valor de a el cual es -1 y de aquí que concluímos que la gráfica de esta función, corta al eje x en 1 y 3 y sus ramas van hacia abajo. Para poder graficarla debemos conocer además el vértice de la misma $V = (x_v; y_v)$ en donde

$x_v = \dfrac{1+3}{2} = 2$ y entonces $y_v = -(2-1)(2-3) = 1$, así $V = (2;1)$; concluímos de aquí que el eje de simetría es $x = 2$. Por último nos falta encontrar el valor que corta al eje y, esto es cuando $x = 0$, $f(0) = -(0-1)(0-3)$. Finalmente con todos estos datos estamos en condiciones de representar gráficamente a esta función.



De la gráfica concluimos que en el intervalo $(-\infty;\ 2)$ la función es **creciente**, pues a medida que aumentan los valores de x aumentan los valores de y. Por otro lado observamos que en el intervalo $(2;\ \infty)$ la función es **decreciente**, pues cuando los valores de x aumentan, los valores de y disminuyen. De esta manera tenemos que la función alcanza un **máximo** en el vértice de la parábola. Por otro lado, al observar la gráfica concluimos que el conjunto imagen de la función es el intervalo $(-\infty, 1)$

Ejercicio 3.54. Graficar las siguientes funciones, indicando luego intervalos de crecimiento y de decrecimiento, si alcanza un valor máximo o mínimo y el conjunto imagen de la misma.

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$
2. $f(x) = 4x^2 + 24x + 32$
3. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

Observación 3.55. En resumen a lo expresado con anterioridad tenemos que a una función cuadrática se la puede encontrar expresada en su forma polinómica ($f(x) = ax^2 + bx + c$), o en su forma factorizada ($f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la parábola) o bien en su forma canónica ($f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, donde (x_v, y_v) es el vértice de la parábola). Estas tres formas en que puede presentarse una función cuadrática son equivalentes, es decir verifican:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$

Estas igualdades se verifican aplicando la propiedad distributiva y asociando convenientemente.

Ejercicio 3.56. Verificar las siguientes igualdades.

$$f(x) = 2(x - 1)(x - 3) = 2(x - 2)^2 - 2 = 2x^2 - 8x + 6$$

3.6.6. Problemas de valores máximos y mínimos

Con frecuencia nos encontramos con la necesidad de determinar el valor más grande o el valor más pequeño en ciertas situaciones problemáticas. A estos problemas se los conoce como problemas de máximos y mínimos y para determinar estos valores se usa del concepto de función cuadrática. Problemas de la vida cotidiana que involucre maximizar o minimizar una función se pueden encontrar, por ejemplo, en el cálculo de áreas, volúmenes, distancia, tiempo, costos o ganancias de algún producto.

Ejemplo 3.57. Si la diferencia entre dos números es 6 **¿Cuáles deben ser los números para obtener el menor producto? ¿Cuál es ese producto?**
Para resolverlo, planteamos la función que representa esta situación. Las incógnitas del problema son los números a encontrar, es por eso que a uno lo definimos como x y al otro como $(x-6)$, pues la diferencia de ambos debe de ser 6. Luego el problema pide determinar estos números cuando el producto entre ellos sea mínimo, entonces nos queda como función:

$$f(x) = x(x-6)$$

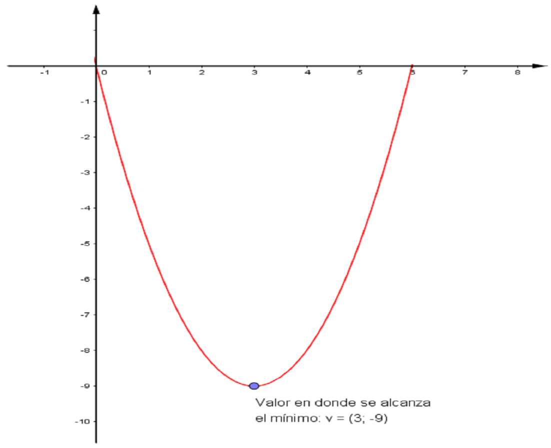
que se corresponde a una función cuadrática expresada en forma factorizada. En el vértice de la parábola se obtiene el valor mínimo, en donde la coordenada x del vértice, en este caso, nos da uno de los números buscados (x), y la coordenada y del vértice nos da, en nuestro caso, el valor del producto mínimo. Determinemos entonces el vértice de la función:
Como las raíces son 0 y 6, $x_v = \dfrac{0+6}{2} = 3$, entonces $y_v = 3(3-6) = -9$, es decir el vértice es:

$$v = (3;\ -9)$$

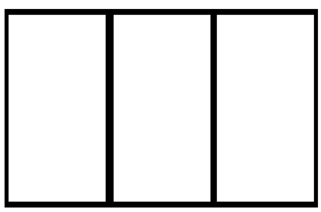
de este resultado damos repuesta al problema:

Repuesta: Los números para obtener el menor producto son 3 y -3; y el producto entre ellos es -9.

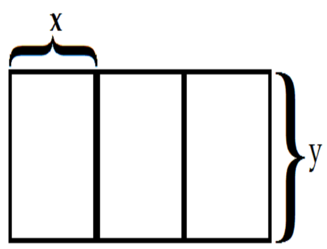
Veamos la representación gráfica de esta función para terminar de entender la repuesta dada al problema:



Ejemplo 3.58. Un granjero dispone de 1200 **metros de cerca para construir** 3 **corrales rectangulares, paralelos e idénticos, como muestra la figura. ¿Cuál es el mayor área total que puede cercar? ¿Cuáles son las dimensiones de cada corral?**



Para resolverlo se debe plantear primero la función que representa la situación problemática. Consideramos las siguientes incógnitas sobre la figura dada:



luego la relación que se da entre las variables de acuerdo a los datos del problema es:

$$6x + 4y = 1200 \ \rightarrow \ y = 300 - \frac{3}{2}x$$

entonces si el problema nos pide determinar el mayor área total que se puede cercar, la función a maximizar es:

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x)\,y \quad \text{reemplazando por el valor de } y \\ f(x) &= (3x)\left(300 - \frac{3}{2}x\right) \quad \text{factorizamos ésta función para determinar sus raíces} \\ f(x) &= -\frac{9}{2}x(x - 200) \end{aligned}$$

Las raíces de la función son $x = 0$ y $x = 200$ entonces el vértice se va a encontrar en:

$$\begin{aligned} v &= (x_v;\ y_v) \quad \text{donde} \quad x_v = \frac{200+0}{2} = 100 \ \rightarrow \ y_v = -\frac{9}{2}100(100-200) = 45000 \\ &\rightarrow \quad v = (100;\ 45000) \end{aligned}$$

de estos resultados obtenemos la respuesta al problema:

Respuesta: El área total máxima es 45000 y las dimensiones de cada corral son $x = 100$ e $y = 300 - \frac{3}{2}100 = 150$.

Ejemplo 3.59. Se introducen abejas en una isla. La población máxima fue de 4410 en el día 11, y se extinguió en 32 días.

1. **¿Qué función describe la evolución?**

2. **¿Cuántas abejas fueron introducidas?**

3. **¿En qué días la población fue de 4250 abejas?**

Resolvamos cada apartado del problema:

1. Para encontrar la función cuadrática que describe la evolución en la población de abejas a medida que transcurrieron los días, vamos a utilizar los datos del problema indicando los valores que representan de la misma, en este caso de que la población máxima fue de 4410 en el día 11, obtenemos el vértice de la parábola y de que la población se extinguió a los 32 días, obtenemos un punto de la misma, este es el punto $(32, 0)$. Con estos datos podemos encontrar la forma canónica de la función cuadrática:

$$f(x) = -10 \cdot (x - 11)^2 + 4410$$

2. Para responder a la pregunta de cuántas abejas fueron introducidas, debemos encontrar el valor de la función para $x = 0$ pues en este instante es cuando comienza la población de abejas.

$$f(0) = -10 \cdot (0 - 11)^2 + 4410 = 3200$$

Por lo tanto la población introducida fue de 3200 abejas.

3. Para responder a la última pregunta debemos encontrar los valores de x cuando $f(x) = 4250$ esto es:

$$4250 = -10 \cdot (x - 11)^2 + 4410$$

luego resolviendo la ecuación que nos queda obtenemos que para $x = 7$ y $x = 15$ el valor de la función es de 4250, entonces en el día 7 y 15 la población de abejas fue de 4250.

Ejercicio 3.60. Resolver los siguientes problemas:

1. **Hallar dos números cuya suma sea** 10 **y cuyo producto sea máximo.**

   Solución: *Los números son el* 5*.*

2. **Un proyectil describe la trayectoria de la gráfica dada por la función** $h(t) = 200 + 80t - 16t^2$ **donde** $h(t)$ **es la altura en metros y** t **el tiempo en segundos. Analizando a la función responder:**

a) ¿Cuál es la altura que alcanza a los 3 segundos?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

c) ¿Qué tiempo emplea en llegar al suelo?

3.7. Polinomios

Los polinomios que estudiaremos son expresiones de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...a_1 x + a_0$$

donde $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, ...,\ a_1$ son números reales constantes, llamados **Coeficientes;** x es la **Indeterminada,** y los exponentes de cada una de las x $(n,\ n-1,\ n-2,\ .....,\ 1,\ 0)$ son números naturales constantes. A cada término del polinomio se lo llama **Monomio.** a_n es el **Coeficiente Principal**; en el caso de que $a_n = 1$ se dice que el polinomio es **Mónico.** a_0 es el **Término Independiente**.

1. $P(x) = \underbrace{-5}_{\text{Coeficiente principal}} x^4 + 2x^3 + 4x + \underbrace{6}_{\text{Término independiente}}$

2. $P(x) = \sqrt{2}x + 6x^2 - 3x^3 + 1$

3. $P(x) = -3x^{-2} + 2x - 4$ *ojo!! este no es un polinomio pues -2 no es un número natural.*

4. $P(x) = x^7 + 2x^3 - \sqrt{2x}$ *ojo!! este tampoco es un polinomio pues una de las potencias a la que está elevada x no es un número natural.*

El **Grado** de un polinomio es el del monomio de mayor grado que figura en él.

Ejemplo 3.61. $P(x) = -6x^5 + 3x^4 + x - 9$ este polinomio es de grado 5 pues es la mayor potencia a la que está elevada x.

Un **polinomio está ordenado** cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según su grado.

Ejemplo 3.62.

1. $P(x) = 3x^6 - 5x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ es un polinomio ordenado de manera decreciente.

2. $P(x) = 2 + 3x - 4x^3 + 19x^4 - 10x^5$ es un polinomio ordenado de manera creciente.

3. $P(x) = 5x^3 - 4x^7 + 8x^4 - 3x + \sqrt{10}$ es un polinomio no ordenado.

Un polinomio de grado n es **Completo** cuando en él figuran $(n + 1)$ monomios, desde el término independiente hasta el grado n. Si el polinomio no está completo, lo podemos completar sumando con coeficientes nulos todos los términos faltantes.

Ejemplo 3.63.

1. $P(x) = -3x^2 + 5x - 4$ es un polinomio completo y ordenado de manera decreciente.

2. $P(x) = \ x^7 - 2x^5 + 3x^3$ es un polinomio no completo, pero ordenado. Lo podemos completar de la siguiente manera:

$$P(x) = \ x^7 + 0x^6 - 2x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

3. $P(x) = 8x^6 + x^2 - 10 + 6x^5 + \sqrt{2}x$ este polinomio no está completo, ni ordenado, luego lo podemos ordenar y completar de la siguiente manera:

$$P(x) = 8x^6 + 6x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 + \sqrt{2}x - 10$$

Un valor de x es **Raíz** de $P(x)$ si el polinomio se anula para ese valor:

$$x = a \text{ es raíz de } P(x) \text{ si y solo sí } P(a) = 0$$

Ejemplo 3.64. $x = 1$ es raíz de $P(x) = x^5 - x^3$ porque $P(1) = 1^5 - 1^3 = 0$, como así también -1 es raíz de $P(x) = x^5 - x^3$, pues $P(-1) = 0$.

¿Ahora bien como hacemos para obtener el valor de las raíces de un polinomio de forma exacta, es decir sin tener la necesidad de ir probando aquel valor que anula al polinomio? Para dar repuesta a este problema requerimos del concepto de **Factorización de un polinomio. Factorear o factorizar** un polinomio en **R** significa expresarlo como producto de polinomios de grado 1 y/o de polinomios de mayor grado irreducibles (aquellos polinomios que no tienen raíces reales). Existen diferentes estrategias que se utilizan para factorizar un polinomio, dependiendo de la estructura que estos presentan.

3.7.1. Estrategias de Factorización:

Factor común.

Cuando en un polinomio $P(x)$ la variable x figura en todo los términos, es conveniente extraerla como factor común, y se la extrae a la menor potencia.

Ejemplo 3.65. $P(x) = 7x^5 + 5x^4 + x^3$ *factor común* x^3

$\rightarrow P(x) = x^3(7x^2 + 5x + 1)$

Observación 3.66. En algunos casos se extrae un número que es factor común en todo los coeficientes.

Ejemplo 3.67. $P(x) = -4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x$ *factor común* $4x$

$\rightarrow P(x) = 4x(-x^6 - 2x^2 + x + 4)$

Diferencia de cuadrados.

Una diferencia de cuadrados puede escribirse:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

esto es, la resta de dos términos, en donde cada uno de ellos está elevado al cuadrado, es igual al producto de su diferencia por su suma.

Ejemplo 3.68. 1. $P(x) = x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ *Este polinomio queda así expresado en su forma factorizada.*

2. $P(x) = x^4 - 16 = \underbrace{(x^2-4)}_{\text{Diferencia de cuadrados}} \underbrace{(x^2+4)}_{\text{Polinomio Irreducible}}$

$\rightarrow\ P(x) = x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

Factor común por grupos.

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

Ejemplo 3.69. $P(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10$ Agrupamos

$\rightarrow\ P(x) = (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10)$ Sacamos factor común en cada grupo

$\rightarrow\ P(x) = x^4(7x-5) + 2(7x-5)$ Sacamos factor común $(7x-5)$

$\rightarrow\ P(x) = (7x-5)(x^4+2)$

Ejemplo 3.70. $P(x) = 3x^8 + x^7 - 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 2$ Agrupamos

$\rightarrow\ P(x) = (3x^8 + x^7 - 2x^5) + (3x^3 + x^2 - 2)$ Sacamos factor común en el primer grupo

$\rightarrow\ P(x) = x^5(3x^3 + x^2 - 2) + (3x^3 + x^2 - 2)$ Sacamos factor común $(3x^3 + x^2 - 2)$

$\rightarrow\ P(x) = (3x^3 + x^2 - 2)(x^5 + 1)$

Trinomio Cuadrado Perfecto.

Las expresiones de la forma $a^2 + 2ab + b^2$ ó $a^2 - 2ab + b^2$ se denominan trinomio cuadrado perfecto y se obtienen al desarrollar $(a+b)^2$ o $(a-b)^2$ respectivamente, es decir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad\qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Para que un trinomio sea un cuadrado perfecto:

* Dos de los términos deben ser cuadrados a^2 y b^2.

* Antes de a^2 y b^2 no debe haber signo negativo, si lo hubiese, sacar (-1) factor común.

* El producto $(2ab)$ es el término restante.

Ejemplo 3.71. $P(x) = \underbrace{x^2}_{x^2} + \underbrace{10x}_{2.x.5} + \underbrace{25}_{5^2} \rightarrow\ P(x) = (x+5)^2$

Ejemplo 3.72. $P(x) = \underbrace{4x^2}_{(2x)^2} - \underbrace{24x}_{2.x.6} + \underbrace{36}_{6^2} \rightarrow\ P(x) = (2x-6)^2$

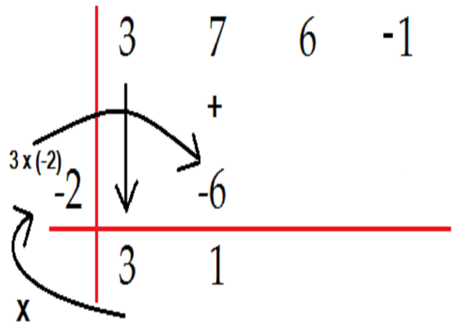
Regla de Ruffini.

La Regla de Ruffini consiste en una disposición práctica que permite efectuar en una forma sencilla la división entre polinomios, siempre que el divisor sea de la forma $(x-a)$.

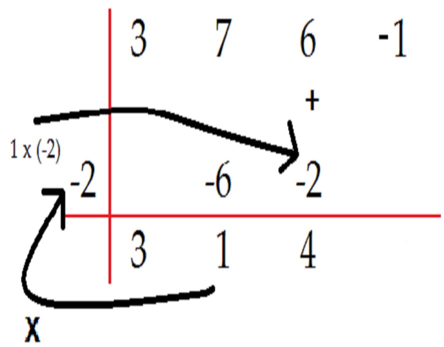
Observación 3.73. Para aplicar esta regla, el polinomio debe de estar completo y ordenado en forma decreciente.

Ejemplo 3.74. Se desea dividir al polinomio $(3x^3 + 7x^2 + 6x - 1)$ por $(x - (-2))$ aplicando la regla de Ruffini. Consideramos entonces los siguientes pasos:

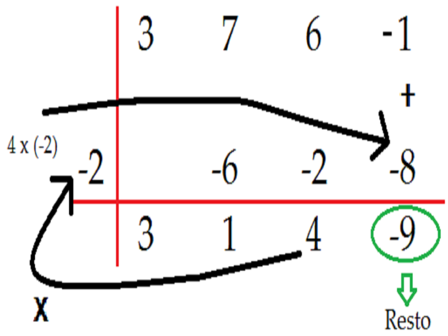
1. En la primera fila se colocan los coeficientes del polinomio, luego se baja el término que se corresponde al coeficiente principal, para ser multiplicado por el (-2); el resultado de este producto, -6, es sumado al coeficiente que sigue, en este caso, el 7.



2. El valor obtenido de sumar $7 + (-6) = 1$, se lo va a multiplicar por (-2) y el resultado se colocará debajo del tercer coeficiente, 6, para realizar su suma:



3. Se vuelve a repetir el procedimiento realizado en 2., con el valor 4 :



4. Luego los valores 3, 1 y 4, serán los coeficientes del cociente de la división, recordemos que este siempre es de un grado menor al del polinomio dado. De esta manera al polinomio $3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ se lo puede expresar:

$$P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1 = (3x^2 + x + 4)(x + 2) - 9$$

donde $3x^2 + x + 4$ es el cociente de la división y -9 es el resto de la misma; cuando se lo divide por $(x + 2)$.

Observación 3.75. El resto obtenido al hacer la división es -9, un valor distinto de 0, y por lo tanto no se puede decir que (-2) es una raíz del polinomio. A nosotros nos va a interesar aplicar esta regla para poder factorizar un polinomio, entonces queremos que el resto nos de 0.

Ejemplo 3.76. Sea $P(x) = x^4 + 2x^2 - 2 + x$ lo queremos dividir por $(x + 1)$ aplicando la regla de Ruffini. Como $P(x)$ no está completo y ordenado, primero debemos hacerlo, para aplicar la regla:

$$\rightarrow \; P(x) = x^4 + 0x^3 + 2x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

Resto

como el resto obtenido es 0, decimos que -1 es raíz del polinomio. Luego al polinomio dado se lo expresa:

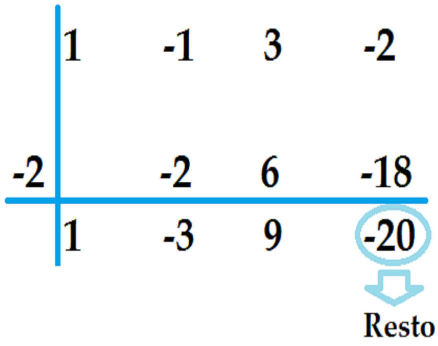
$$P(x) = (x^3 - x^2 + 3x - 2)(x + 1)$$

Si queremos seguir reduciendo a este polinomio como un producto de polinomios de grado uno o polinomios de mayor grado irreducible, se debe factorizar a $(x^3 - x^2 + 3x - 2)$; como no es un cuatrinomio al cubo perfecto, aplicamos la regla de Ruffini nuevamente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 10 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 8 \end{array}$$

Resto

Como el resto es un valor distinto de cero, se tiene que 2 no es raíz del polinomio. Probamos con otro valor:



Como nuevamente el resto es distinto de cero, seguimos probando con distintos números hasta obtener un valor en donde se obtenga resto 0. Pero este método de ir probando, no está bueno, pues se pierde mucho tiempo; entonces recurrimos a lo siguiente: *Las candidatos a raíces racionales de un polinomio son aquellos valores que provienen del cociente de los divisores del término independiente, con los divisores del coeficiente principal.* En nuestro ejemplo serían:

$$\frac{\pm 2}{\pm 1}; \quad \frac{\pm 1}{\pm 1}$$

Observación 3.77. En el caso de que con estos valores no se obtenga resto cero, al hacer la división, significa que la raíz es irracional y en este caso a la misma se la debe de aproximar; lo cual supera al desarrollo de este curso.

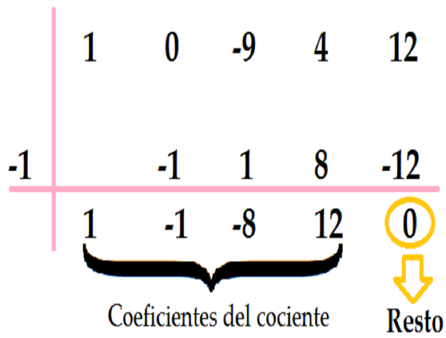
Veamos ahora un par de ejemplos en donde se aplican estas diferentes estrategias para factorizar a un polinomio.

Ejemplo 3.78. Factoricemos el polinomio $P(x) = x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 12x$:

1. Primero aplicamos factor común x :

$$P(x) = x(x^4 - 9x^2 + 4x + 12)$$

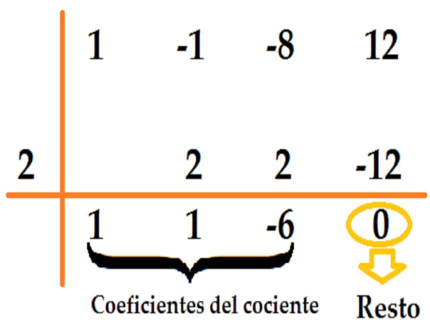
2. Debemos factorizar $(x^4 - 9x^2 + 4x + 12)$ y para ello aplicamos la regla de Ruffini; siendo necesario completar primero al polinomio. Consideramos como raíz al valor -1.



luego

$$x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = (x - (-1))(x^3 - x^2 - 8x + 12)$$

3. Aplicamos nuevamente la regla de Ruffini sobre $(x^3 - x^2 - 8x + 12)$ considerando como raíz a 2.



luego

$$(x^3 - x^2 - 8x + 12) = (x-2)(x^2 + x - 6)$$

4. Ahora debemos factorizar (x^2+x-6) y para ello aplicamos bhaskara, fórmula vista en el segundo capítulo en la sesión de ecuación de segundo grado:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4{,}1.(-6)}}{2{,}1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2{,}1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

luego

$$(x^2 + x - 6) = (x-2)(x-(-3))$$

Finalmente uniendo todos los resultados obtenidos expresamos al polinomio en forma factorizada:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 12x = x(x+1)(x-2)(x-2)(x+3) \\ &\rightarrow \quad P(x) = x(x+1)(x-2)^2(x+3) \end{aligned}$$

Observación 3.79. Los métodos que aplicamos para factorizar a un polinomio pueden ser diferentes a los usados en el ejemplo anterior; pero la expresión factorizada de un polinomio es única.

Ejercicio 3.80. Factorizar los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
2. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
3. $P(x) = 16x^4 - 1$
4. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

Solución:

1. $P(x) = (x-3)^3$
2. $P(x) = (x-2)(x+2)(x^2+1)$
3. $P(x) = 16\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$
4. $P(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$

3.8. Expresiones Racionales

Definición 3.81. Se llama **Expresión Racional** en la variable x, a toda expresión del tipo $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ definida para todo x tal que $Q(x) \neq 0$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

3.8.1. Dominio de Validez

Definición 3.82. El **Dominio de Validez** de la expresión es el conjunto de valores reales de x para los cuales $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 3.83. Dada la expresión racional

$$R(x) = \frac{-3x^2 + 2x - 4}{x^2 - 9}$$

determinemos su dominio de validez, y para ello busquemos las raíces del polinomio del denominador, ya que estos valores son aquellos que quedan fuera del dominio de validez, dado que dan lugar a una división por cero. Para determinar las raíces de $x^2 - 9$, vamos a factorizar a este polinomio.

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \qquad \text{Aplicamos diferencia de cuadrados.}$$

Por lo tanto el dominio de validez es:

$$\text{Dominio: } \mathbf{R} - \{\mathbf{-3};\ \mathbf{3}\}$$

Ejemplo 3.84. Dada la expresión racional

$$R(x) = \frac{2x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

determinemos su dominio de validez, y para ello busquemos las raíces del polinomio del denominador, ya que estos valores son aquellos que quedan fuera del dominio de validez, dado que dan lugar a una división por cero. Para determinar las raíces de $x^3 - 3x^2 + 2x$, vamos a factorizar a este polinomio.

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 2x &= x(x^2 - 3x + 2) && \text{Aplicamos factor común } x. \\ &= x(x-1)(x-2) && \text{Aplicamos Bhaskara.} \end{aligned}$$

Por lo tanto el dominio de validez es:

$$\text{Dominio: } \mathbf{R} - \{\mathbf{0};\ \mathbf{1};\ \mathbf{2}\}$$

3.8.2. Simplificación de Expresiones Racionales

Las operaciones realizadas para simplificar expresiones racionales se realizan con el fin de lograr expresiones mas sencillas que la expresión dada. Estas expresiones mas sencillas serán equivalentes a la original siempre que se las considere definidas en el dominio de validez de la expresión original. Al trabajar con expresiones racionales nos resultará conveniente simplificar sus fórmulas, es decir, su expresión racional. Es posible simplificar cuando existen factores comunes en el numerador y en el denominador; de lo contrario, la expresión racional es irreducible.

Ejemplo 3.85. Simplifiquemos la siguiente expresión racional:

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

Primero debemos buscar el dominio de validez, y para ello calculamos las raíces del polinomio del denominador x^3+3x^2-x-3 aplicando algún método de factorización o la regla de Ruffini o la fórmula resolvente de Bhaskara. Aplicando factor común por grupos nos queda:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - x - 3 &= (x^3 + 3x^2) + (-x - 3) \\ &= x^2(x + 3) - (x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - 1) \end{aligned}$$

Ahora factorizamos $x^2 - 1$, aplicando diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Finalmete la expresión factorizada del polinomio del denominador es:

$$(x+3)(x-1)(x+1)$$

Entonces el dominio de validez es:

$$\text{Dominio: } \mathbf{R} - \{\mathbf{-3},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{1}\}$$

Ahora se debe factorizar al polinomio del numerador, $x^2 - 1$, y para ello aplicamos el caso de factoreo diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

La expresión racional nos queda entonces de la siguiente manera:

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)(x+1)}$$

Ahora sí estamos en condiciones de simplificar a la expresión:

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{\cancel{(x-1)(x+1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)(x+1)}}$$

entonces la expresión simplificada de $R(x)$ es:

$$R(x) = \frac{1}{x+3}$$

Ejemplo 3.86. Simplifiquemos la expresión racional:

$$R(x) = \frac{x^3 - 49x}{x^3 - 14x^2 + 49x}$$

Primero debemos buscar el dominio de validez, y para ello calculamos las raíces del polinomio del denominador $x^3 - 14x^2 + 49x$ aplicando algún caso de factorización, la regla de Ruffini o la fórmula resolvente de Bhaskara. En este caso nos conviene aplicar el caso de factoreo, factor común:

$$x^3 - 14x^2 + 49x = x(x^2 - 14x + 49)$$

luego $x^2 - 14x + 49$, como es un trinomio al cuadrado perfecto, nos queda:

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

Finalmente:

$$x^3 - 14x^2 + 49x = x(x - 7)^2 = (x - 0)(x - 7)^2$$

Entonces el dominio de validez es:

$$\text{Dominio: } \mathbf{R} - \{\mathbf{0},\ \mathbf{7}\}$$

Ahora factorizamos al polinomio del numerador $x^3 - 49x$; y para ello aplicamos el caso de factoreo, factor común:

$$x^3 - 49x = x(x^2 - 49)$$

luego $x^2 - 49$, representa una diferencia de cuadrados, entonces se lo puede expresar:

$$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$$

finalmente

$$x^3 - 49x = x(x - 7)(x + 7)$$

Luego la expresión racional, al expresar a los polinomios del numerador y del denominador en forma factorizada, nos queda:

$$R(x) = \frac{x^3 - 49x}{x^3 - 14x^2 + 49x} = \frac{x(x-7)(x+7)}{x(x-7)^2}$$

Ahora sí estamos en condiciones de simplificar:

$$R(x) = \frac{x^3 - 49x}{x^3 - 14x^2 + 49x} = \frac{\cancel{x}\cancel{(x-7)}(x+7)}{\cancel{x}(x-7)^{\cancel{2}}}$$

entonces la expresión simplificada de $R(x)$ es:

$$R(x) = \frac{x+7}{x-7}$$

Ejercicio 3.87. Simplificar las siguientes expresiones racionales, determinando previamente su dominio de validez.

1. $R(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$
2. $R(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 3x}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}$
3. $R(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2}$
4. $R\,(x) = \dfrac{3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x}{x^2 + x}$

Solución:

1. $R(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$; Dominio de Validez: $\mathbf{R} - \{2,\ 3\}$

2. $R(x) = \dfrac{2x\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+3)}$; Dominio de Validez: $\mathbf{R} - \{-3,\ 1\}$

3. $R(x) = \dfrac{x\,(x+1)}{(x-2)}$; Dominio de Validez: $\mathbf{R} - \{1,\ 2\}$

4. $R(x) = 3(x-1)(x+1)$; Dominio de Validez: $\mathbf{R} - \{-1,\ 0\}$

Capítulo 4

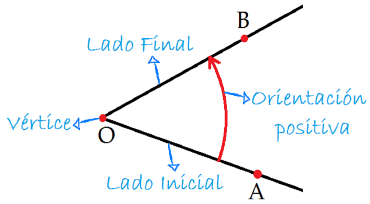
Trigonometría

Estudiaremos en este capítulo una parte de la matemática conocida con el nombre de *Trigonometría*. En griego, el término *trigonon* significa triángulo y *metron* medida, por lo cual la trigonometría se especializa en el estudio de la medida de los triángulos y surge de la necesidad de resolver problemas relacionados con la medición de ángulos y distancias en triángulos y otros polígonos.

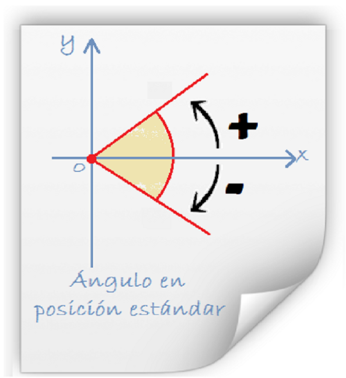
4.1. Ángulos

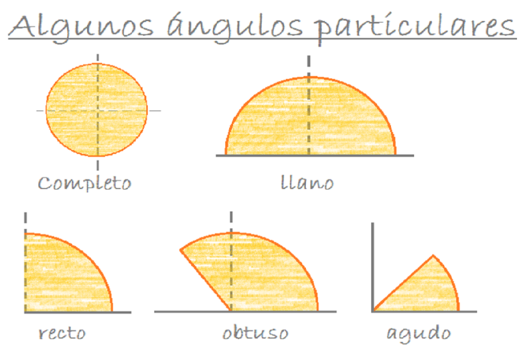
En trigonometría se considera que un ángulo plano se genera por el giro de una semirrecta alrededor de su origen, considerado éste un punto fijo. En la figura se representa el ángulo $A\hat{O}B$ generado por el giro de orientación positiva (antihorario) de una semirrecta en su posición inicial $\bar{OA}$ hasta su posición final $\bar{OB}$. El punto O

se llama *vértice* del ángulo, la semirrecta $\overline{OA}$ *lado inicial* y la semirrecta $\overline{OB}$ *lado final* del ángulo



Un giro con orientación positiva es aquel que se realiza en sentido antihorario, es decir, en el sentido contrario al que se mueven las manecillas del reloj. La orientación negativa de un ángulo, por su parte, es la de un giro realizado en sentido horario.





Como ya se adelantó en la imagen anterior, dado un sistema de coordenadas rectangulares los ángulos que tienen su vértice en el origen del sistema de coordenadas y el semieje positivo de las x como lado inicial, se dice que están en posición **normal** o **estándar**. En estas circunstancias, dos ángulos en posición estándar o normal, uno de medida α y otro de medida β son ángulos **coterminales** si y solo si comparten el mismo lado terminal.

4.2. Sistemas de medición de ángulos

Existen dos sistemas que permiten caracterizar la medida o amplitud de un ángulo, el *Sistema Sexagesimal* y el *Sistema Circular o Radial.*

4.2.1. Sistema Sexagesimal

Este sistema utiliza como unidad de medida el *grado sexagesimal* $1°$, cuya amplitud se define como la $90 - ava$ parte de un ángulo recto. De lo precedente se deduce que un ángulo recto mide $90°$.

Los submúltiplos del grado sexagesimal son:

✓ El *minuto sexagesimal* definido por la relación $1° = 60'$

✓ El *segundo sexagesimal dado por* $1' = 60''$

Ejemplo 4.1. Supongamos que conocemos la medida de un ángulo, y que la misma es de $13,45°$. ¿Cómo podemos expresar esta cantidad en grados, minutos y segundos?

Solución: Pues $13,45° = 13° + 0,45°$ y haciendo uso de la conocida **regla de tres** calcularemos:

$1°$----------$60'$

$0,45°$---------- $x = \dfrac{0,45 \cdot 60}{1} = 27'$

Por lo tanto, tenemos que $13,45° = 13°27'$

Ejemplo 4.2. Calcular la medida del ángulo α sabiendo que es la tercera parte del ángulo $\beta = 95°$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 95 & 3 \\ \cline{2-2} 5 & 31,66... \\ 20 & \\ 20 & \end{array}$$

Luego $\alpha = 31,\overset{\frown}{6}$ sólo nos resta expresar el resultado en grados, minutos y segundos. Para ello apelaremos a la regla de tres aproximando $\alpha = 31,66°$

$$1°\text{\_\_\_\_\_}60'$$
$$0,66°\text{\_\_\_\_\_\_} \quad x = \frac{0,66 \cdot 60}{1} = 39,6'$$

Obtuvimos ahora $\alpha = 31°39,6'$ pero el resutado debe expresarse en grados, minutos y segundos, haciendo uso nuevamente de la regla de tres, en este caso para $39,6' = 39' + 0,6'$

$$1'\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}60''$$
$$0,6'\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad x = \frac{0,6 \cdot 60}{1} = 36''$$

Estamos ahora en condiciones de dar solución al problema: $\alpha = 31°39'36''$.

Ejercicio 4.3. Expresar en grados, minutos y segundos la medida de los siguientes ángulos:

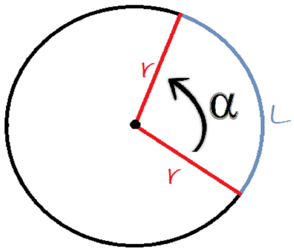
1. $\alpha = 13,2^\circ$
2. $\beta = 45,52^\circ$
3. $\theta = 637,96^\circ$
4. $\gamma = 0,96^\circ$

4.2.2. Sistema Circular o Radial

Consideremos una circunferencia de radio r y un ángulo $A\hat{O}B$ con su vértice O en el centro de la circunferencia. En el sistema circular se define la media α del ángulo $A\hat{O}B$ como el cociente entre la longitud L del arco que subtiende el ángulo y la longitud r del radio de la circunferencia, es decir $\alpha = \frac{L}{r}$.

Definición 4.4. Se denomina radián a la medida del ángulo que subtiende un arco L de igual longitud que el radio de la circunferencia r, es decir, si $L = r$ entonces $\alpha = 1rad$. Para poner de manifiesto que la medida del ángulo está en radianes, se añade la unidad de medida expresada mediante la palabra **rad** a continuación del valor de la medida del ángulo.

Gráficamente, podemos expresarlo como:



Dado que el perímetro de un círculo es $P = 2\pi r$ donde r es el radio de la circunferencia, si α representa un ángulo completo (es decir un giro) entonces $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad$. Esto nos permite realizar la siguiente identificación:

$$2\pi\ rad = 360° \qquad \pi\ rad = 180° \qquad \frac{1}{2}\pi\ rad = 90°$$

y a partir de estas identidades podemos pasar de un sistema de medición de ángulos al otro, haciendo nuevamente uso de la ya mencionada *regla de tres.*

Ejemplo 4.5. Calculemos la medida del ángulo β en el sistema radial sabiendo que en el sexagesimal mide $\beta = 60°$

Solución:

$$180°\_\_\_\_\_\pi rad$$

$$60°\_\_\_\_\_\_ \quad x = \frac{60° \cdot 1\pi}{180°} = \frac{60}{180}\pi\ rad = \frac{1}{3}\pi\ rad$$

Obtuvimos que $\beta = \frac{1}{3}\pi\ rad$. Para ello notemos que **no** usamos el valor de π al efectuar la regla de tres y por eso mismo el resultado queda expresado en “$\pi\ \ rad$”.

$$180°\_\_\_\_\_\pi\ rad$$

$$60°\_\_\_\_\_\_ \quad x = \frac{60° \cdot 1\pi}{180°} = 1,047\ rad$$

Obtuvimos que $\beta = 1,047\ rad$ pues en este caso sí usamos el valor de π al efectuar la regla de tres y por eso mismo el resultado queda expresado en "rad".

Notemos que el **no** uso de π en los cálculos nos arroja un valor exacto para trabajar, y por este motivo comunmente los ángulos son expresados en "$\pi\ \ rad$".

Ejemplo 4.6. Calculemos la medida del ángulo α en el sistema sexagesimal sabiendo que en el radial mide $\alpha = \frac{3}{4}\pi\ rad$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \pi\ rad\_\_\_\_\_180° & \\ \dfrac{3}{4}\pi\ rad\_\_\_\_\_\_ & x = \dfrac{\frac{3}{4}\pi\ rad \cdot 180°}{\pi\ rad} = \dfrac{\frac{3}{4} \cdot 180°}{1} = 135° \end{array}$$

Luego $\alpha = 135°$

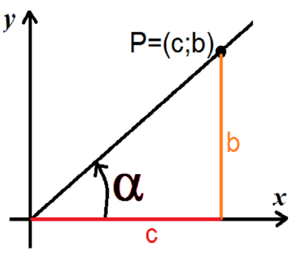
Ejercicio 4.7. Encontrar la medida de los siguientes ángulos en ambos sistemas de medición.

1. $\alpha = 132°$
2. $\beta = 1,9\ rad$
3. $\gamma = 45°31'$
4. $\delta = 3\pi\ rad$

Ejercicio 4.8. Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una longitud de arco $L = 24,6m$ tiene como ángulo correspondiente uno de $70°$.

4.3. Funciones trigonométricas

Definiremos las funciones trigonométricas considerando un punto sobre el lado terminal de un ángulo ubicado en posición estándar. Consideremos en el plano $\mathbf{R}^2$ un ángulo de medida α (en radianes) en posición estándar y un punto $P = (c, b)$ en el lado terminal de α, a una distancia $r > 0$ del origen de coordenadas. Quedan definidos entonces los siguientes cocientes:



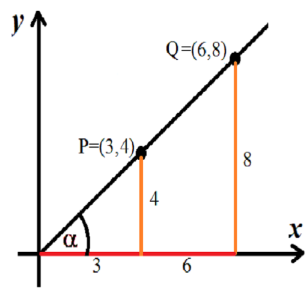
$$\frac{\text{ordenada de P}}{r} = \frac{b}{r}$$

$$\frac{\text{abscisa de P}}{r} = \frac{c}{r}$$

Puede probarse que los resultados de estos cocientes no dependen de la distancia r del punto P al origen $(0; 0)$ sino que quedan determinados por la medida del ángulo α elegido. Nosostros nos conformaremos con ver un ejemplo de lo antes mencionado. Calculemos los valores de r usando el Teorema de Pitágoras.

$$r_P = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$r_Q = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$



Las relaciones entre los lados serían entonces

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} \qquad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

es decir, **no dependen** del punto considerado. Como vemos en el ejemplo, los cocientes considerados no dependen necesariamente de la distancia r del punto considerado al origen de coordenadas. En su lugar, esas relaciones varían en función de α y por eso decimos que son "Funciones de α". En base a esas razones, definimos las conocidas *Funciones Trigonométricas seno y coseno* como sigue:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{r} \qquad\qquad \cos(\alpha) = \frac{c}{r}$$

Donde α es la medida en radianes del ángulo considerado y $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ números reales (pues $\frac{b}{r}$ y $\frac{c}{r}$ lo son). A partir de las anteriores se definen otras cuatro funciones trigonométricas conocidas:

- ✓ *Tangente de α:* $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{b}{c} \qquad \cos(\alpha) \neq 0 \quad (\text{o } c \neq 0)$
- ✓ *Cotangente de α:* $\cot(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{c}{b} \qquad \sin(\alpha) \neq 0 \quad (\text{o } b \neq 0)$
- ✓ *Secante de α:* $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)} = \dfrac{r}{c} \qquad \cos(\alpha) \neq 0 \quad (\text{o } c \neq 0)$
- ✓ *Cosecante de α:* $\csc(\alpha) = \dfrac{1}{\sin(\alpha)} = \dfrac{r}{b} \qquad \sin(\alpha) \neq 0 \quad (\text{o } b \neq 0)$

Nota 4.9. Dado que $r > 0$ tenemos las siguientes características de las funciones trigonométricas:

✓ El seno y el coseno de α quedan definidos para todo $\alpha \in \mathbf{R}$.

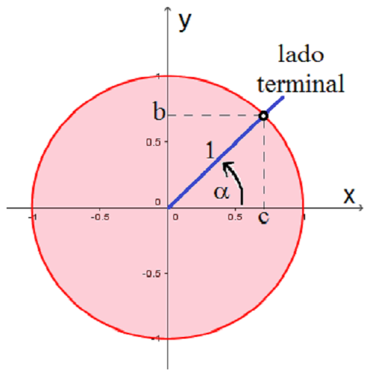
✓ La tangente y la secante de α **no** están definidas para ángulos cuyos lados terminales estén contenidos en el eje de las y, es decir ángulos como $\frac{\pi}{2} rad$, $\frac{3}{2}\pi$ rad, $\frac{5}{2}\pi$ rad...

✓ La cotangente y la cosecante de α **no** están definidas para ángulos cuyos lados terminales estén contenidos en el eje de las x, es decir ángulos como 0 rad, π rad, 2π rad, 3π rad...

4.3.1. La Circunferencia Trigonométrica

Definición 4.10. Considerando en el plano un sistema de ejes cartesianos, llamaremos *circunferencia trigonométrica* a la circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas.

Siendo α la medida del ángulo en radianes, considerado α en posición estándar, la intersección de la circunferencia trigonométrica con el lado terminal del ángulo, determinan un punto P cuyas coordenadas son $P = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$. Podemos verlo gráficamente de la siguiente manera:



$$\sin(\alpha) = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{r} = \frac{c}{1} = c$$

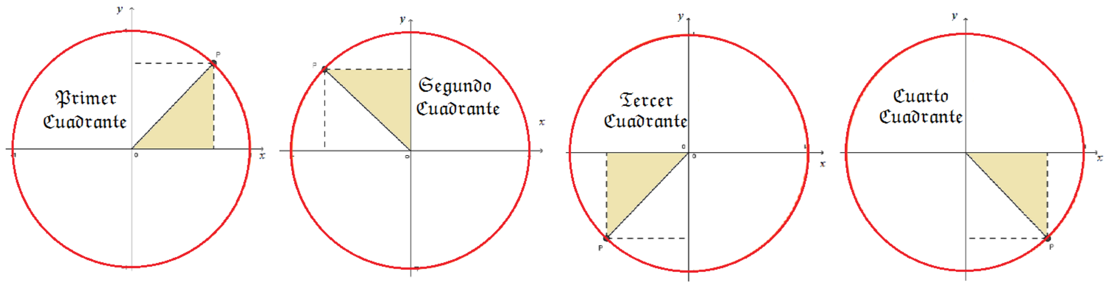
Luego $P = (c, b) = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$. La posición del punto P dependerá del ángulo α considerado, pero siempre se encontrará sobre la circunferencia trigonométrica, por lo tanto la abscisa c y la ordenada b del punto siempre estarán entre -1 y 1, es decir:

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1 \qquad\qquad -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

Dado que las funciones trigonométricas se definieron independientemente del valor r de la distancia entre el origen y el punto P seleccionado sobre el lado terminal del ángulo, podemos establecer $r = 1$ para trabajar más cómodamente sobre la circunferencia trigonométrica, cuando estemos trabajando con funciones trigonométricas.

4.3.2. Signo de las Funciones Trigonométricas

Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, los ejes coordenados dividen al plano cartesiano en cuatro cuadrantes. Con el objeto de analizar los signos de $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ (y por tanto el del resto de las funciones trigonométricas) se pueden observar las coordenadas del punto P para ángulos de medida α con los lados terminales en los cuatro cuadrantes. Veamos gráficamente cómo sería cada caso:



Observando los gráficos se concluye que:

✓ El seno (ordenada del punto P) es un número positivo para los ángulos del primero y del segundo cuadrante y es negativo para ángulos en el tercero y cuarto cuadrante. Asimismo, vemos que $\sin(\alpha)$ es nulo cuando $\alpha = 0\ rad$ o $\alpha = \pi\ rad$, $\sin(\alpha) = 1$ cuando $\alpha = \frac{\pi}{2} rad$ y $\sin(\alpha) = -1$ cuando $\alpha = \frac{3\pi}{2} rad$.

✓ El coseno (abscisa del punto P) es un número positivo para los ángulos del primero y del cuarto cuadrante y es negativo para ángulos en el segundo y tercer cuadrante. Asimismo, vemos que $\cos(\alpha)$ es nulo cuando $\alpha = \frac{\pi}{2} rad$ o $\alpha = \frac{3\pi}{2} rad$, $\cos(\alpha) = 1$ cuando $\alpha = 0\ rad$ y $\cos(\alpha) = -1$ cuando $\alpha = \pi\ rad$.

✓ Los signos de las demás razones trigonométricas son consecuencia de los signos de las funciones seno y coseno. Estas conclusiones son válidas también para ángulos de más de un giro ($\alpha > 2\pi\ rad$), sólo debemos mirar en qué cuadrante cae el punto P, es decir, en qué cuadrante se intersectan el lado terminal del ángulo con la circunferencia trigonométrica.

Ejercicio 4.11. Carcular el signo de las restantes funciones trigonométricas, a partir de los datos dados en cada caso:

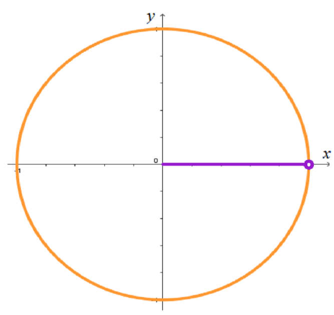
1. $\sin(x) > 0$ y $\cos(x) > 0$
2. $\cos(x) > 0$ y $\tan(x) < 0$

4.4. Valores de algunos ángulos característicos

A continuación vamos a calcular los valores de las funciones trigonométricas para algunos ángulos particulares.

Ángulo de $0rad$

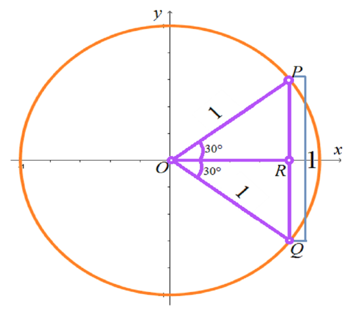
Al marcar en la circunferencia trigonométrica un ángulo de $\alpha = 0rad$ el punto P que resulta de la intersección del lado terminal del ángulo con la circunferencia es el punto $P = (1, 0)$ y por lo tanto



$$\sin(\alpha) = 0 \quad \cos(\alpha) = 1 \quad \tan(\alpha) = 0$$

Ángulo de $\frac{\pi}{6}rad$

Al marcar en la circunferencia trigonométrica un ángulo de $\alpha = \frac{\pi}{6}rad$ podemos marcar un segundo ángulo de igual medida pero orientación contraria y quedará determinado entonces un triángulo $\overset{\triangle}{OPQ}$ tal que $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$ pues ambos



segmentos son radio de la circunferencia; de donde el triángulo es isósceles y de allí que los ángulos en P y en Q deben ser de igual medida. Ahora bien, como todos los ángulos interiores de un triángulo suman 180° entonces cada ángulo medirá 60°, es decir el triángulo es equilátero y por tanto el lado restante medirá igual que los dos lados ya conocidos: $\overline{PQ} = 1$. Como $\overline{OR}$ divide al triángulo en dos triángulos iguales, entonces

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \overline{PR} = \frac{1}{2}$$

Haciendo uso del Teorema de Pitágoras calculemos el lado faltante del triángulo $\overset{\triangle}{OPR}$ cuya longitud nos dará el valor del coseno del ángulo: $\overline{OR} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \overline{OR} \\
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= = \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} \\
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= = \sqrt{\tfrac{3}{4}} \\
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= = \tfrac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

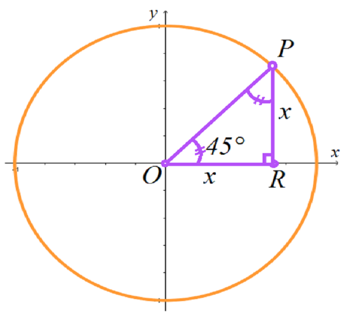
De allí que

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulo de $\frac{\pi}{4} rad$

Notemos, en este caso que $45^o = \frac{\pi}{4} rad$ y nuevamente como los ángulos interiores de todo triángulo suman 180° conociendo los ángulos de 90° y 45° del triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{OPR}$ podemos calcular el ángulo $O\hat{P}R$ faltante que también resulta ser de 45°.

Estos nos dice que el tiángulo es isósceles y que por tanto $\overline{OR} = \overline{PR}$ y que $\overline{OP} = 1$ dado que es radio de la circunferencia trigonométrica. Conociendo estos datos apliquemos el Teorema de Pitágoras al triángulo en cuestión.



Llamemos $\overline{OR} = \overline{PR} = x$ de donde

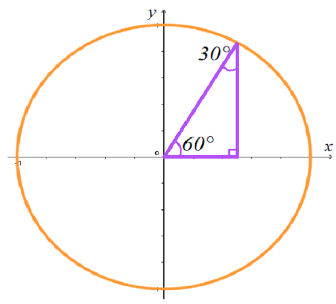
$$1 = x^2 + x^2 \rightarrow 1 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

de donde

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Ángulo de $\frac{\pi}{3}rad$

En este caso si marcamos un ángulo de $\frac{\pi}{3}rad = 60°$ notaremos que el triángulo que queda definido tiene un ángulo de 30° cuyo seno (que se encuentra representado por el cateto opuesto) coincide con el coseno del ángulo de 60°.
Análogamente, el coseno del ángulo de 30° está representado por el cateto adyacente, que es el cateto opuesto al ángulo de 60° y por este motivo:

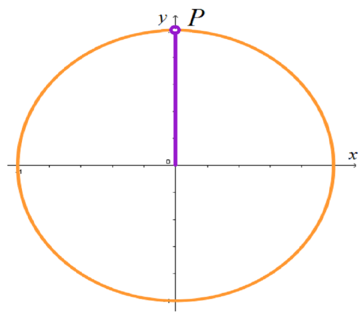


$$\checkmark \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\checkmark \ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\checkmark \ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

Ángulo de $\frac{\pi}{2}rad$

Por último al marcar un ángulo de $\frac{\pi}{2}rad$ en nuestra circunferencia trigonométrica el lado terminal del mismo coincide con el eje de las y, y por lo tanto el punto P será en este caso $P = (1, 0)$ de donde deducimos que



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ no está definida.}$$

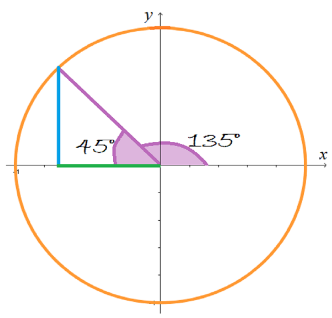
Podemos resumir lo antes visto en la siguiente tabla de valores:

α	$0rad$	$\frac{\pi}{6}rad$	$\frac{\pi}{4}rad$	$\frac{\pi}{3}rad$	$\frac{\pi}{2}rad$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Notemos que sólo calculamos valores de ángulos dados en el primer cuadrante, en el resto de los cuadrantes los valores se van repitiendo, aunque sí debemos analizar el signo de las funciones trigonométricas en cada caso. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.12. Calculemos el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para un ángulo de $\frac{3\pi}{4}rad$.

Solución:
Como vemos, un ángulo de $\frac{3\pi}{4}rad = 135°$ deja determinado en el segundo cuadrante un ángulo de $45°$ para el cual conocemos las razones trigonométricas, sólo nos falta evaluar el signo de las mismas.



$\checkmark$ $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\checkmark$ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\checkmark$ $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

Ejercicio 4.13. Calcular el valor de todas las funciones trigonométricas para los siguientes ángulos:

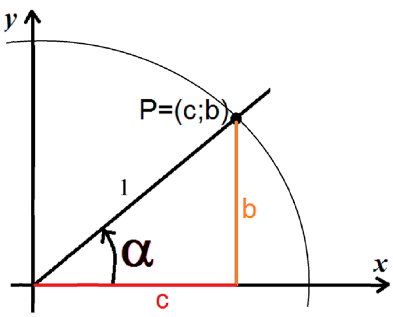
1. $\alpha = 150°$ 2. $\beta = 210°$ 3. $\theta = -45°$ 4. $\gamma = 315°$

4.5. Relaciones Fundamentales de la Trigonometría

En esta sección se incluyen identidades trigonométricas típicas que nos serán de gran utilidad a la hora de resolver problemas.

4.5.1. Identidad Pitagórica

Aplicando el Teorema de Pitágoras al gráfico de la figura tenemos lo siguiente: $1^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow 1 = c^2 + b^2$ Luego: $1 = c^2 + b^2$ de donde: $1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$



Esta identidad, válida para todo ángulo de medida α, es conocida como Identidad Pitagórica.

Observación 4.14. Notemos que $\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$

4.5.2. Seno y Coseno de la suma o diferencia de ángulos.

Para todos $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, valen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

De estas identidades se deducen otras, algunas de las cuales por su frecuente uso enunciamos a continuación.

Relaciones donde intervienen ángulos opuestos

En este caso, tomemos $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}\sin(-\beta) &= \sin(0-\beta)\\ &= \sin(0)\cdot\cos(\beta) - \cos(0)\cdot\sin(\beta)\\ &= 0\cdot\cos(\beta) - 1\cdot\sin(\beta)\\ &= -\sin(\beta)\end{aligned}$$

Luego $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$. Análogamente, realicemos los cálculos para probar que $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$

$$\begin{aligned}\cos(-\beta) &= \cos(0-\beta)\\ &= \cos(0)\cdot\cos(\beta) + \sin(0)\cdot\sin(\beta)\\ &= 1\cdot\cos(\beta) + 0\cdot\sin(\beta)\\ &= \cos(\beta)\end{aligned}$$

Luego $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$.

Relaciones para ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$

En este caso, tomemos $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\alpha)\\
&= \sin(\alpha)\cdot 0 + 1\cdot\cos(\alpha)\\
&= \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Luego $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$. Análogamente,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\alpha)\\
&= \cos(\alpha)\cdot 0 - 1\cdot\sin(\alpha)\\
&= -\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

Luego $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$

Relaciones donde intervienen ángulos complementarios

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 1\cdot\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cdot 0\\
&= \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Luego $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$. De manera análoga,

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha)\sin(\frac{\pi}{2})\\ &= \cos(\alpha)\cdot 0+\sin(\alpha)\cdot 1\\ &= \sin(\alpha)\end{aligned}$$

Luego $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\alpha)$

Ejemplo 4.15. Calculemos $\sin(75^\circ)$.

$$\begin{aligned}\sin(75^\circ) &= \sin(45^\circ+30^\circ)\\ &= \sin(45^\circ)\cos(30^\circ)+\sin(30^\circ)\cos(45^\circ)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}\end{aligned}$$

Calculemos ahora $\cos(15^\circ)$.

$$\begin{aligned}\cos(15^\circ) = \cos(90^\circ-75^\circ) &= \sin(75^\circ)\\ &= \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}\end{aligned}$$

Calculemos finalmente $\cos(75^\circ)$.

Por el Teorema de Pitágoras $\sin^2(75°) + \cos^2(75°) = 1$ de donde

$$\begin{aligned}
\cos^2(75°) &= 1 - \sin^2(75°) \\
&= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{2\left(1+2\sqrt{3}+3\right)}{16} \\
&= \frac{16-4\sqrt{3}+8}{16} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}
\end{aligned}$$

4.5.3. Algunas identidades Simpáticas.

Veamos algunos ejemplos interesantes de identidades trigonométricas generales que pueden resultarnos de interés en un futuro cercano.

✓ $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$

Demostración:

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2(x) &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} && \text{definición de tangente} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} && \text{suma de fracciones} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} && \text{identidad pitagórica} \\
&= \sec^2(x) && \text{definición de secante}
\end{aligned}$$

Luego se verifica que $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$.

✓ $1 - \tan^2(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\cos^2(x)}$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)} &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \quad \text{coseno de la suma de ángulos}\\
&= \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\
&= 1 - \tan^2(x) \quad \text{definición de tangente}
\end{aligned}$$

Luego se verifica que $1 - \tan^2(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\cos^2(x)}$.

✓ $\sec^2(x) - 1 = \tan^2(x)$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sec^2(x) - 1 &= \frac{1}{\cos^2(x)} - 1\\
&= \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \quad \text{suma de fracciones}\\
&= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x) - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \quad \text{identidad pitagórica}\\
&= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\
&= \tan^2(x)
\end{aligned}$$

Luego se verifica que $\sec^2(x) - 1 = \tan^2(x)$.

4.6. Periodicidad de las Funciones Trigonométricas

En la naturaleza y en nuestro entorno habitual hay fenómenos que se repiten a intervalos regulares de tiempo, como el caso de las mareas, los péndulos, entre otras. Las funciones que describen este tipo de fenómenos se conocen con el nombre de *funciones periódicas.* En estos casos se llama periodo al menor lapso de tiempo que debe transcurrir para que el fenómeno comience a repetirse.

Definición 4.16. Dada una función no constante $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se dice que f es periódica cuando existe un número real $p \neq 0$ para el cual se verifica:

$$f(x) = f(x + kp) \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

El periodo de la función es el menor número positivo p para el que se cumple la igualdad.

Dado un ángulo cualquiera $\alpha \in \mathbf{R}$ y sus ángulos coterminales $\alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$, las funciones trigonométricas satisfacen:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + 2k\pi) \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + 2k\pi) \\ \sec(\alpha) &= \sec(\alpha + 2k\pi) \\ \csc(\alpha) &= \csc(\alpha + 2k\pi) \end{aligned}\right\} \text{Funciones de periodo } 2\pi$$

$$\left.\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \tan(\alpha + k\pi) \\ \cot(\alpha) &= \cot(\alpha + k\pi) \end{aligned}\right\} \text{Funciones de periodo } \pi$$

Este concepto es fundamental a la hora de realizar los gráficos de las funciones trigonométricas, pues nos dice que sólo necesitamos conocer con exactitud el gráfico de las mismas en un periodo completo, por ejemplo en $[0; 2\pi]$ en el caso de la función $f(x) = \sin(x)$, y luego la extenderemos por simple repetición fuera de dicho intervalo.

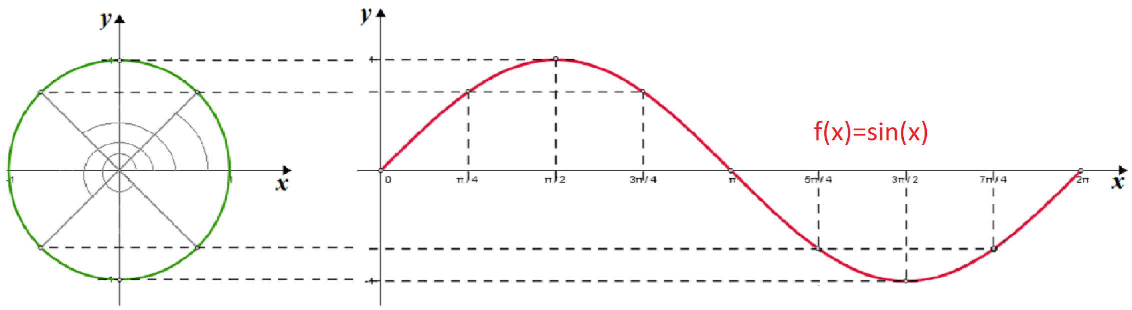
4.7. Gráfico de las Funciones Seno y Coseno.

En esta sección analizaremos el gráfico de las funciones seno y coseno, definidas por las fórmulas

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin(x) \qquad g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \cos(x)$$

ambas en un período completo, es decir, con $x \in [0; 2\pi]$, y luego extenderemos el gráfico para cualquier $x \in \mathbf{R}$. Daremos inicio a la sección de gráficos con la gráfica de la función seno, sin embargo, antes de comenzar notemos que es necesario usar dos sistemas de ejes coordenados con igual escala. En uno de ellos representaremos la circunferencia trigonométrica y en el segundo iremos marcando los valores del $\sin(x)$ para cada medida x del ángulo elegido. En síntesis, la gráfica se construye tomando diferentes valores de ángulos sobre la circunferencia trigonométrica y hallando el seno de ellos que ya vimos que está representado por el valor de la ordenada del punto P

ubicado sobre la cincunferencia trigonométrica. Asimismo estuvimos trabajando la deducción del seno de muchos ángulos notables y nos podemos servir de ellos para realizar la representación gráfica de la función seno.



De la gráfica se pueden sacar algunas conclusiones tales como que el dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales y la imagen de la función son los números comprendidos entre -1 y 1, es decir, el conjunto $[-1;1]$.

Conocida ya la gráfica de la Función Seno nos concentraremos ahora en conocer la gráfica de la Función Coseno.

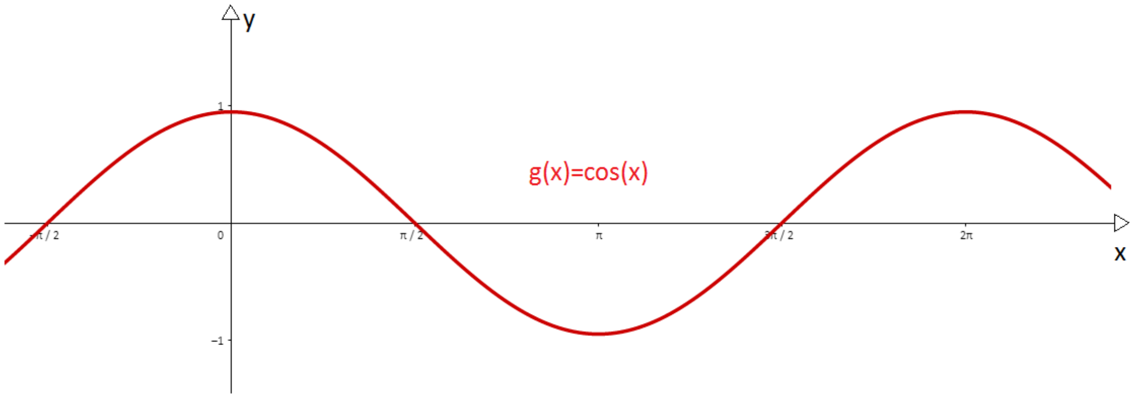
Para ello, debemos recordar una identidad trigonométrica vista con anterioridad

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

y entonces si aplicamos esta identidad resulta:

$$g(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

lo que indica que su gráfica será igual a la gráfica del seno pero desplazada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda, con lo cual la gráfica buscada será:



4.8. Ecuaciones Trigonométricas.

En esta sección de trigonometría aprenderemos a resolver ecuaciones trigonométricas.

Definición 4.17. Una ecuación trigonométrica es aquella en la que las incógnitas aparecen formando parte de los argumentos de funciones trigonométricas.

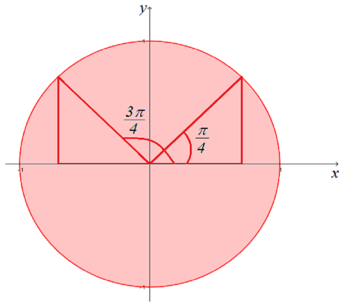
Al igual que en las ecuaciones algebraicas, mediante ecuaciones equivalentes se llegará a una nueva expresión en la cual el valor que la satisface es evidente.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 4.18. Resolvamos las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

✓ $2\sin(x) - \sqrt{2} = 0$

Solución:



$$2\sin(x) - \sqrt{2} = 0$$

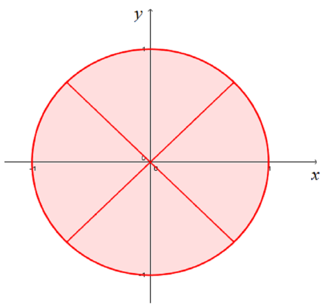
$$2\sin(x) = \sqrt{2}$$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego, mirando la tabla de valores de $\sin(x)$ notamos que, para que $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ necesitamos que $x = \frac{\pi}{4}rad$ o bien $x = \frac{3\pi}{4}rad$. Luego la solución será $S = \left\{\frac{\pi}{4}rad, \ \frac{3\pi}{4}rad\right\}$

✓ $\tan^2(x) - 1 = 0$

Solución:



$$\tan^2(x) - 1 = 0$$

$$\tan^2(x) = 1$$

$$\tan(x) = \pm\sqrt{1}$$

$$\tan(x) = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

$$\tan(x) = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

Mirando la tabla de valores notamos que, para que $\tan(x) = 1$ necesitamos que $x = \frac{\pi}{4}rad$ o bien $x = \frac{5\pi}{4}rad$; en cambio para que $\tan(x) = -1$ notamos que $x = \frac{3\pi}{4}rad$ o bien $x = \frac{7\pi}{4}rad$. Luego la solución será $S = \left\{\frac{\pi}{4}rad, \ \frac{3\pi}{4}rad, \ \frac{5\pi}{4}rad, \ \frac{7\pi}{4}rad\right\}$

✓ $\cos(x) + \sin(2x) = 0$

$$\cos(x) + \sin(2x) = 0$$

$$\cos(x) + \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 0$$

$$\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\cos(x)\left[1 + 2\sin(x)\right] = 0$$

de lo anterior se deduce que

$$\cos(x) = 0 \quad \text{o bien} \quad 1 + 2\sin(x) = 0 \quad \text{luego}$$

$$x = \frac{\pi}{2}rad \;\; x = \frac{3\pi}{2}rad \;\; x = \frac{7\pi}{6}rad \;\; x = \frac{11\pi}{6}rad$$

La solución será entonces: $S = \left\{\frac{\pi}{6}rad,\ \frac{3\pi}{2}rad,\ \frac{5\pi}{6}rad,\ \frac{11\pi}{6}rad\right\}$

Ejercicio 4.19. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas, con $x \in [0; 2\pi]$

a) $\cos(x) = 0$

b) $2\sin(2x) - 1 = 0$

c) $-\sin^2(x) + 2\cos(x) = -2$

Solución:

a) $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right\}$

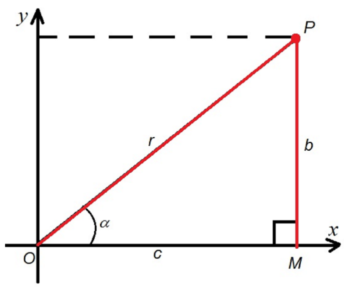
c) $S = \{\pi\}$

4.9. Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

Un triángulo rectángulo es aquel que posee un ángulo recto, por ejemplo, todo ángulo en posición estándar cuyo lado terminal se encuentra en el primer cuadrante genera un triángulo rectángulo como se ve en el ejemplo de la figura, donde el ángulo recto es aquel que tiene su vértice en el punto M.

Para analizar los ángulos de un triángulo rectángulo, por ejemplo, el ángulo $M\hat{O}P$ de medida α coloquemos al mismo en posición estándar, añadiendo un sistema de ejes coordenados en el vértice del ángulo a analizar. Luego, y de acuerdo a lo antes definido tenemos las siguientes razones:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{r} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$



$$\cos(\alpha) = \frac{c}{r} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

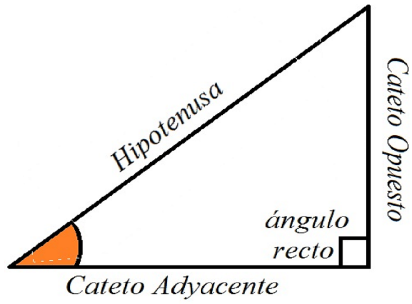
$$\tan(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud del cateto adyacente}}$$

A partir de las anteriores definimos:

$$\csc(\alpha) = \frac{r}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto}}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{r}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente}}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud del cateto opuesto}}$$



4.10. Resolviendo triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo rectángulo significa, como ya lo mencionamos con aterioridad, hallar las medidas de todos sus ángulos y lados. Cuando se dan como dato un conjunto suficiente de esas medidas es posible encontrar las restantes. Para ello debemos conocer conceptos previos, algunos de ellos los hemos desarrollado en las secciones anteriores y otros los veremos a continuación. Entre los más usados se encuentran:

✓ *Funciones trigonométricas*

✓ *Teorema de Pitágoras*

✓ *La conocida propiedad*

La suma de los ángulos interiores de un

triángulo es $180°$

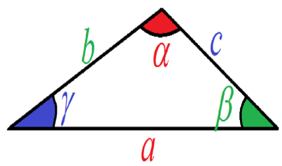
✓ *Los Teoremas de Seno y de Coseno.*

De los items anteriores hemos visto la mayoría, sólo nos resta enunciar los Teoremas de Seno y de Coseno, cosa que haremos en la inmediatez.

Para resolver un triángulo son necesarios al menos tres datos entre los cuales debe hallarse al menos un lado. Si el triángulo a resolver es rectángulo, uno de los datos es el valor del ángulo recto el cual mide 90° que se opone al lado de mayor longitud, llamado hipotenusa. En los triángulos rectángulos basta entonces con conocer dos datos más. Recordemos que en este tipo de figuras geométricas podemos hacer uso de las razones trigonométricas antes vistas.

Por otro lado, para el caso de un triángulo no rectángulo, en el cual las razones trigonométricas no son aplicables, se recurre a los antes mencionados Teorema de Seno y Coseno, que enunciaremos a continuación:

Teorema del Seno: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$



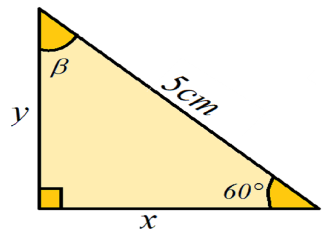
Teorema del Coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

Para continuar vamos a ver algunas aplicaciones de lo visto en esta sección.

Ejemplo 4.20. Obtengamos las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $5cm$ si uno de sus ángulos agudos mide $60°$. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo?

Solución:

Lo primero que debemos hacer es un dibujo que represente la sutuación problemática para poder visualizar los datos que tenemos y aquellos que nos faltan.



De acuerdo a los datos dados uno de los ángulos agudos mide 60°, como el triángulo es rectángulo el ángulo agudo faltante es aquel que sumado a los dados suma 180°, luego

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Calculemos ahora los lados del triángulo haciendo uso de las razones trigonomérticas antes vistas.

$$\cos(60^\circ) = \frac{x}{5cm} \Longrightarrow x = \cos(60^\circ) \cdot 5cm = \frac{5}{2}cm$$

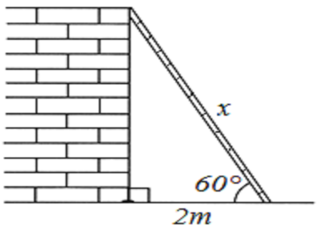
$$\sin(60^\circ) = \frac{y}{5cm} \Longrightarrow y = \sin(60^\circ) \cdot 5cm = \sqrt{3}\frac{5}{2}cm$$

Luego hemos resuelto el triángulo dado, es decir conocemos todos sus lados y ángulos.

Ejemplo 4.21. ¿Qué longitud tiene una escalera si al apoyar su extremo superior sobre una pared a perfecta escuadra, la base queda a dos metros de la pared y forma un ángulo de 60° con el suelo?

Solución:

Lo primero que debemos hacer en cada problema que se nos presente, es un dibujo que represente la situación.



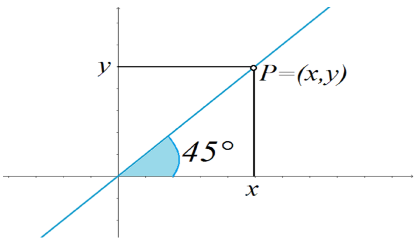
Como vemos en la representación, hemos llamado x a la longitud de la escalera y ubicado los datos correspondientes en el dibujo realizado. En nuestro esquema tenemos el lado adyacente al ángulo conocido y queremos calcular la hipotenusa. La razón trigonométrica a aplicar en este triángulo rectángulo es el coseno pues relaciona los tres datos que tenemos.

$\cos(60°) = \dfrac{2m}{x} \Rightarrow x = \dfrac{2m}{\cos(60°)} = \dfrac{2m}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 4m$

Luego, la longitud de la escalera es de $4m$.

Ejemplo 4.22. Calculemos la ecuación de una recta si se sabe que pasa por el punto $(0,0)$ y forma un ángulo de $45°$ con el semieje positivo de las x.

Solución:



Realizamos en primer lugar el gráfico de una recta que cumple con los datos dados en el ejercicio, es decir que la misma pasa por el origen y forma un ángulo de $45°$ con el semieje positivo de las x.

Tomemos un punto $P = (x; y)$ sobre la recta, entonces queda determinado el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{POx}$, con O representando el origen de coordenadas. Así, la relación que puede establecerse entre ambas variables para determinar la ecuación de la recta viene dada por la tangente del ángulo conocido, es decir:

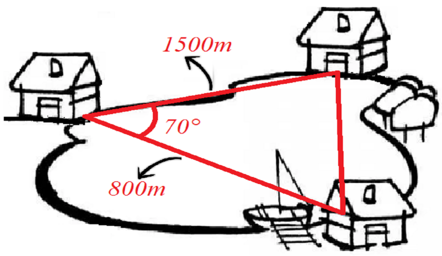
$$\tan(45°) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \tan(45°) \cdot x \Rightarrow y = x$$

Luego la ecuación de la recta es $y = x$.

Notemos que la tangente del ángulo sólo me da la inclinación, es decir, la pendiente de la recta pues es el desplazamiento horizontal y vertical de la misma, pero como además la recta pasa por el origen entonces la ordenada al origen es 0.

Ejemplo 4.23. Dos casas se hallan separadas por una laguna. A qué distancia se encuentran una de la otra si al observarlas desde un galpón ubicado a $1500m$ de una y a $800m$ de la otra, las visuales forman un ángulo de $70°$.

Solución:



Lo primero que debemos notar es que el triángulo no es necesariamente rectángulo y que por lo tanto no podemos aplicar las razones trigonométricas, sino que debemos hacer uso de los Teoremas de Seno y Coseno. Para ello, observemos lo siguiente:

Los datos dados se corresponden con dos lados y el ángulo que ellos forman, y el dato que debemos encontrar es el lado restante. Estamos en las condiciones de aplicar Teorema de Coseno (aunque claramente cualquiera de los dos teoremas nos llevaría, tarde o temprano, a un resultado). Llamemos H a la distancia entre ambas casas de donde tenemos:

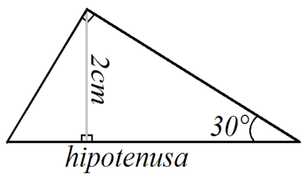
$$
\begin{aligned}
H^2 &= 1500^2 + 800^2 - 2 \cdot 1500 \cdot 800 \cdot \cos(70°) \\
H &= \sqrt{2069151,656} \\
H &= 1438,454
\end{aligned}
$$

Luego, la distancia que separa ambas casas es de $1438,454$ metros.

Ejercicio 4.24. La sombra de un árbol mide $50m$ y el ángulo que forman los rayos del sol con el suelo es de $45°$. ¿Cuál es la altura del árbol?

Solución: el árbol mide 50m.

Ejercicio 4.25. Resolver el siguiente triángulo rectángulo sabiendo que uno de sus ángulos mide $30°$ y que la altura correspondiente a la hipotenusa mide $2cm$. Calcular además su área y perímetro.



Ejercicio 4.26. Una antena que se encuentra a la orilla de un río tiene una altura de $30m$ sobre el nivel del agua. Desde un punto opuesto (al mismo nivel pero en la otra orilla) se observa la parte más alta de la antena con un ángulo de elevación de $30°$. ¿Cuál es el ancho del río?

Ejercicio 4.27. En un terreno horizontal se divisa una torre desde un punto A bajo un ángulo de 30^o. Al aproximarse $20m$ se llega a un punto B, desde el que se observa la torre bajo un ángulo de 45^o. Calcular la altura de la torre.

Solución: la torre mide aproximadamente $27,3$m.

Ejercicio 4.28. Los brazos de un compás, que miden $12cm$, forman un ángulo de $50°$ ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

Solución: el radio de la circunferencia será aproximadamente de $10,14$ cm.

Bibliografía

[1] Purcell, Varberg, Rigdon. *Cálculo Diferencial e Integral. Novena Edición.* Ed. Pearson Educación. México. 2007.

[2] Leithold, L. *Matemáticas Previas al Cálculo.* Ed. Harla, México. 1989.

[3] Plaza, E . Sirne, R. *Matemática de Pregrado para Ingeniería.* Ed. Eudeba, Argentina, 2014.

[4] Graña. Jerónimo. Pacetti. Jancsa. Petrovich. *Los Números de los Naturales a los Complejos.* Editado por el Ministerio de Educación de la Nación, Argentina, 2009.